



Doç. Dr. Onur TAN

İstanbul Üniversitesi – Cerrahpaşa
Mühendislik Fakültesi
Jeofizik Mühendisliği Bölümü

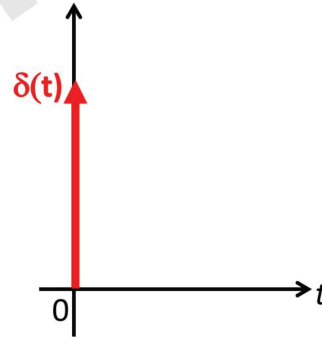
Veri İşlemde Temel Fonksiyonlar

Veri İşlemde Temel Fonksiyonlar

Delta Fonksiyonu

- $t = 0$ anında genliği sonsuzdur.
- Paul Dirac tarafından tanımlandığı için *Dirac Delta Fonksiyonu* olarak da adlandırılır.
- *Birim Dürtü Fonksiyonu* [Unit Impulse Function] olarak da adlandırılır.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$



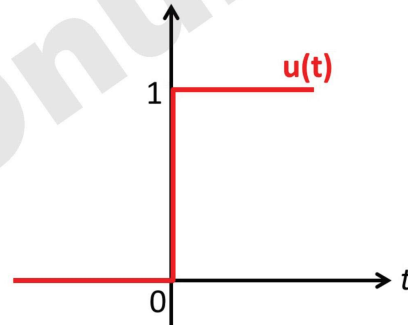
Örn. Delta Fonksiyonu yerin katmanlı yapısını kullanarak sismik sinyal üretiminde kullanılır.

Veri İşlemde Temel Fonksiyonlar

Basamak Fonksiyonu [Step Function]

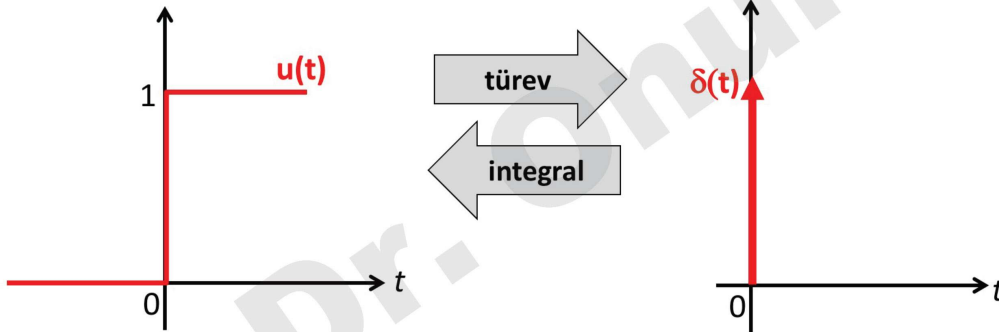
- $t \geq 0$ zammında genliği 1'dir.

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$



Örn.

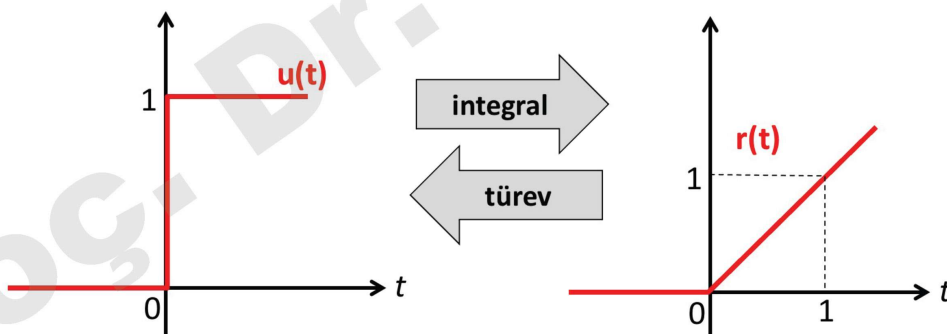
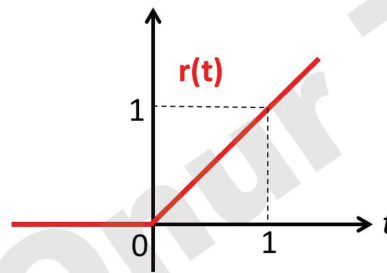
Veri İşlemde Temel Fonksiyonlar



Veri İşlemde Temel Fonksiyonlar

Birim Rampa Fonksiyonu [Unit Ramp Function]

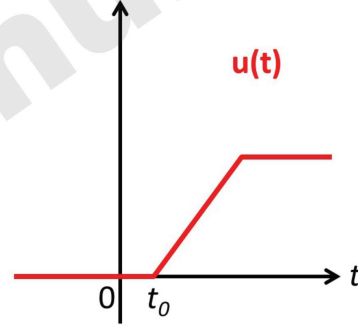
$$r(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t, & t > 0 \end{cases}$$



Veri İşlemde Temel Fonksiyonlar

Birim Rampa Fonksiyonu [Unit Ramp Function]

$$r(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ t - t_0, & t > t_0 \end{cases}$$

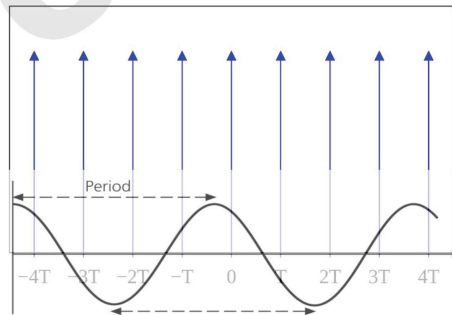


Veri İşlemde Temel Fonksiyonlar

Dirac Tarak Fonksiyonu [Dirac Comb Function]

- Periyodik delta fonksiyonundan oluşur.
- **Dürtü Treni Fonk.** [Impulse Train Func.] veya **Örnekleme Fonk.** [Sampling Func.] olarak da isimlendirilir.
- Analog verilerin sayısallaştırılmasında örnekleme işleminde kullanılır.

$$C_T(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$



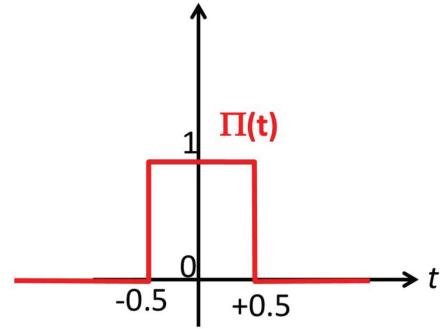
Analog sinyal ile genliği 1 olan Tarak Fonk. çarpılarak örnekleme yapılabilir.

Veri İşlemde Temel Fonksiyonlar

Dikdörtgen Fonksiyonu [Rectangular Function]

- Birim genişlik ve yüksekliğe sahiptir.
- Frekans ortamında tanımlı dikdörtgen fonksiyonu süzgeçleme (filtreleme) işlemlerinde kullanılır.
- Pi Fonk., Heaviside Pi Fonk., Kapı Fonk. [Gate] gibi isimler de alır.

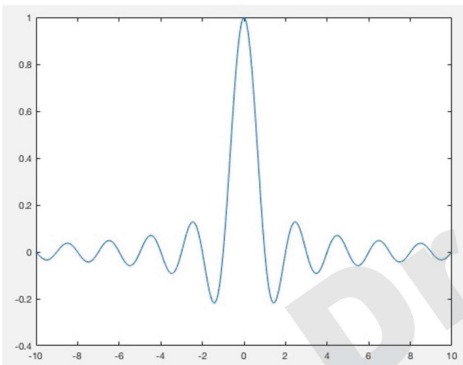
$$\Pi(t) = \begin{cases} 0, & |x| > 1/2 \\ 1/2, & |x| = 1/2 \\ 1, & |x| < 1/2 \end{cases}$$



Veri İşlemde Temel Fonksiyonlar

Dikdörtgen Fonksiyonu [Rectangular Function]

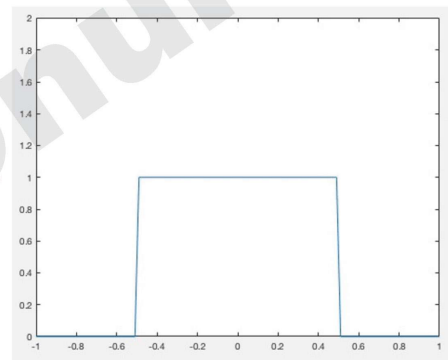
Zaman Ortamı



sinc fonk.

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}$$

Frekans Ortamı



dikdörtgen fonk.

Fourier
Transformu

Veri İşlemde Temel Fonksiyonlar

sinc Fonksiyonu [sinc Function]

- Özellikle frekans ortamında filtre uygularken dikdörtgen fonk. kullanıldığından, bunun üretilmesi için zaman ortamında sinc fonk. ile oluşturulan zaman sinyali Fourier Transformı ile frekans ortamına dikdörtgen fonk. olarak geçirilir.

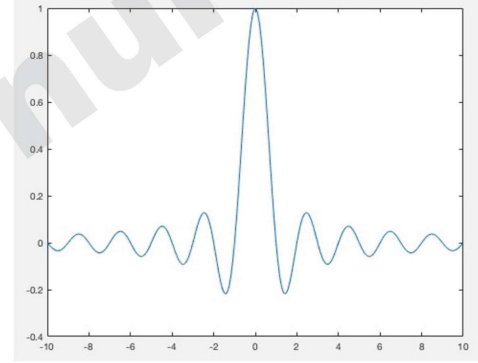
$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

normalize sinc fonk.:

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(t) dt = 1$$

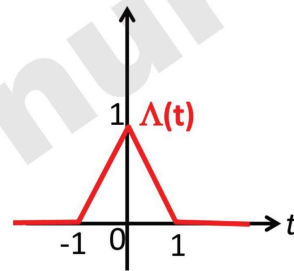
sinc fonk. (normalize) altında kalan alanın toplamı 1'dir.



Veri İşlemde Temel Fonksiyonlar

Üçgen Fonksiyonu [Triangular Function]

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 0, & |x| > 1 \\ 1 - |x|, & |x| < 1 \end{cases}$$

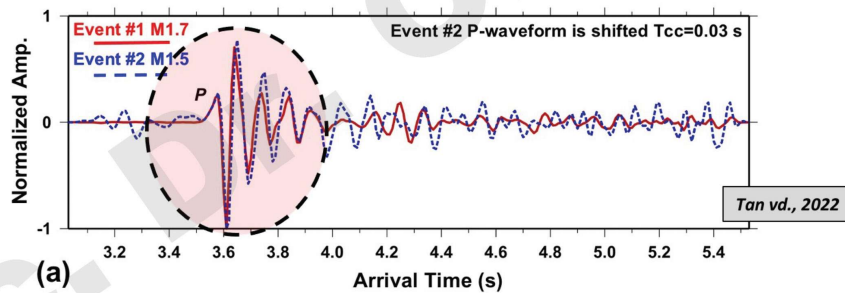


İlişki (Öz İlişki / Çapraz İlişki)

İlişki

Doğadaki olaylar arasında ilişkiler bulunur. Örneğin iyonosferdeki elektrik yük dağılımının değişimi ile yer manyetik ve yer elektrik alanlarının değişimi arasında ilişki vardır.

Olaylar arasında ilişki aramanın amaçlarından biri, bir süreç içinde yer alan bağımsız değişkenler arasında yada iki ayrı sürecin bağımsız değişkenleri arasındaki ilişkiyi bulmaktır.



Burada M1.7 ve M1.5 büyüklüğünde iki ayrı depremin P dalgasının benzer olduğu görülüyor. Bu benzerliği binlerce, milyonlarca deprem kaydı içinde nasıl belirleriz?

İlişki

x ve y periyodik iki zaman serisi arasındaki ilişkiyi aramak için aşağıdaki integral kullanılır.

ilişki,
korelasyon
[correlation]

$$C_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int x(t)y(t + \tau)dt$$

C: İlişki Fonk.

T: Veri boyu

τ : Kayama miktarı

Jeofizikte ilişki çok çeşitli amaçlarla kullanılır. Örn. zaman dizilerindeki dönerselliklerin incelenmesi, güç spektrumu hesaplaması, koherans hesaplaması, sismik sinyallerde gürültünün bastırılması, sinyal sıkıştırması, iğnecik ve ön kestirme ters-evrişim işlemleri, uyum süzgeçlemesi.

İlişki

$$C_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int x(t)y(t + \tau)dt$$

x ve y farklı iki fonksiyon ise C_{xy} **çapraz ilişki** [cross-correlation] olarak adlandırılır.

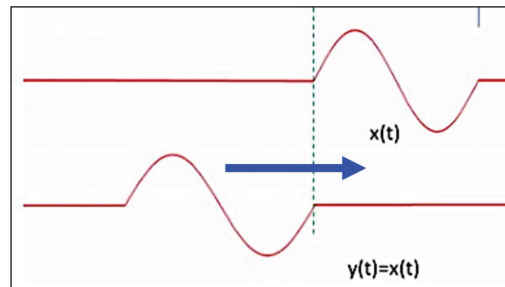
x ve y aynı fonksiyon ise ($x=y$) ve bu fonksiyonun içerisinde bir benzerlik aranıyor ise buna **özilişki** [auto-correlation] denir (C_{xx}).

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int x(t)x(t + \tau)dt$$

Buradaki $1/T$ terimi periyodik sinyaller için ortalama değer alındığını gösterir.



Buradaki işlem, sinyallerden birinin sabit tutularak, diğerinin τ kadar kaydırıldıktan sonra birbiriyle her bir değerin çarpılması ve toplanması, daha sonra bir τ kadar kaydırılarak işlemin tekrar edilmesidir. Bu toplanmış değerler τ 'nın fonksiyonu olarak çizilebilir.



Özilişki

T_1 periyoduna sahip $x(t)$ özilişkisi

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{T_1} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)x(t+\tau)dt$$

$$x(t) = x(t+T_1)$$

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{T_1} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$$

$$x(t+\tau) = x(t+\tau+T_1)$$

$$C_{xx}(\tau + T_1) = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} x(t)x(t+\tau+T_1)dt$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{C_{xx}(\tau)}$$

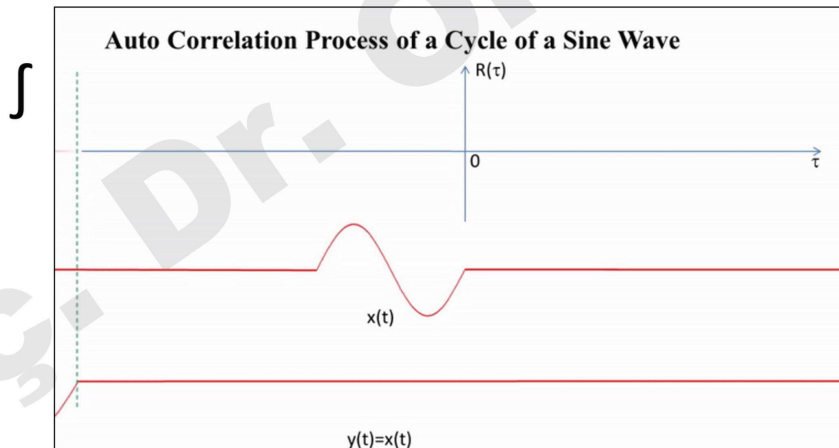
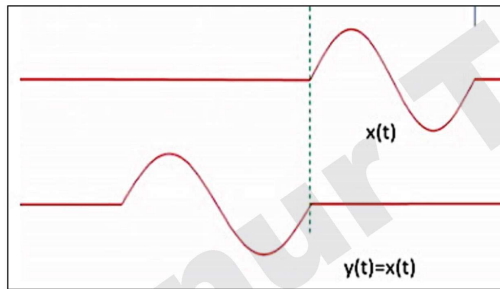
$$C_{xx}(\tau + T_1) = C_{xx}(\tau)$$



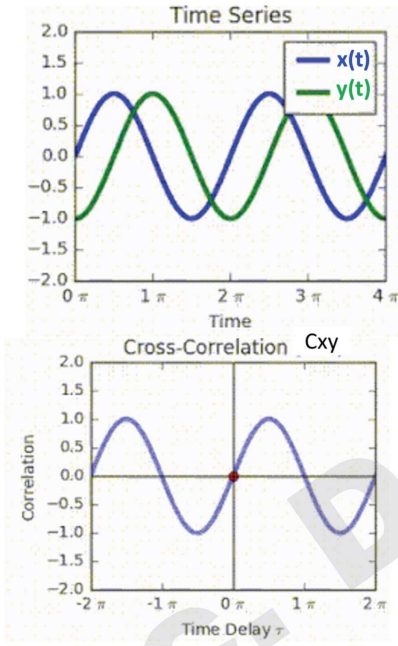
Fonksiyon periyodik ise özilişkisi de periyodiktir.
Veride periyodik bileşenler var ise bunların özilişki fonksiyonunun da T periyodu ile yinelenirler.

Özilişki

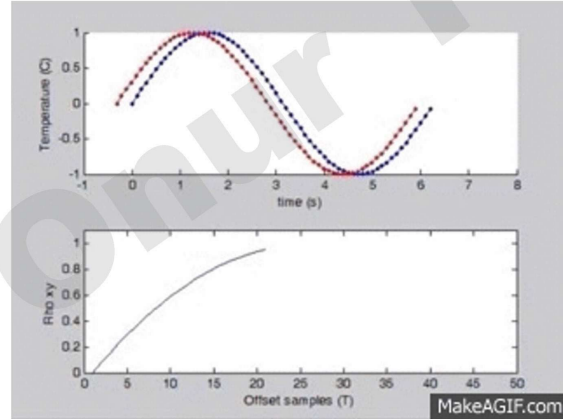
Sinyallerden herhangi birinde genlikte yada zamanda ters döndürme gibi bir değişiklik yapılamamıştır.



Özilişki



<https://en.wikipedia.org/wiki/Cross-correlation>



Özilişki

Özilişki fonksiyonu çift bir fonksiyondur.

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)x(t+\tau)dt$$

$$x(t)=x(-t)$$

$$C_{xx}(-\tau) = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)x(t-\tau)dt$$

$p=t-\tau$ dönüşümü yaparsak

$$C_{xx}(-\tau) = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T}{2}-\tau}^{+\frac{T}{2}-\tau} x(p)x(p+\tau)dt$$

$$C_{xx}(-\tau) = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(p)x(p+\tau)dt$$

$$C_{xx}(-\tau) = C_{xx}(\tau)$$

$x(t)$ periyodik olduğundan integralin

$T_1/2$ ve $-T_1/2$

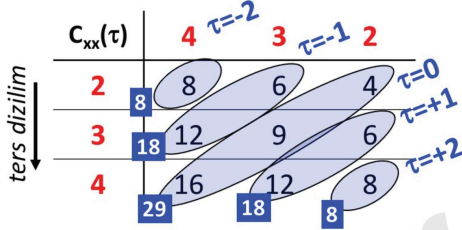
arasında yapılması ile

$-T_1/2 - \tau$ ve $T_1/2 - \tau$

arasında yapılması aynı sonucu verir.

Özilişki

$x(1) \ x(2) \ x(3)$
 $x(4, 3, 2)$ sinyalinin özilişkinin hesaplanması



$$C_{xx}(-2) = 8 \quad C_{xx}(-1) = 18 \quad C_{xx}(0) = 29$$

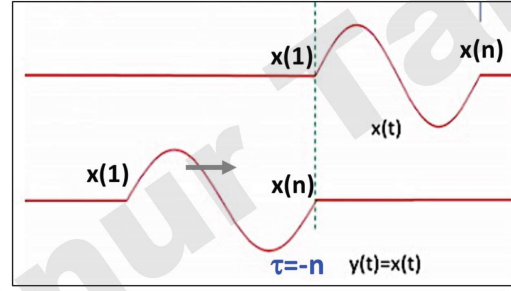
$$C_{xx}(+1) = 18 \quad C_{xx}(+2) = 8$$

$$C_{xx}(\tau) = (8, 18, 29, 18, 8)$$

Genellikle özilişki fonk. maksimum değeri 1 kabul edilir.

Normalize edersek:

$$C_{xx}(\tau) = (0.2759 \ 0.6207 \ 1.0000 \ 0.6207 \ 0.2759)$$



$\tau=-2$	4 3 2	$4 \cdot 2 = 8$
$\tau=-1$	4 3 2	$4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 18$
$\tau=0$	4 3 2	$4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 29$
$\tau=+1$	4 3 2	$3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 18$
$\tau=+2$	4 3 2	$2 \cdot 4 = 8$

```
%
x = [4 3 2] ;
Cxx = xcorr(x);
Cxx/max(Cxx)
```

Çapraz İlişki

T_1 periyoduna sahip $x(t)$ ve $y(t)$, periyodik iki sinyal ise bunların çapraz ilişkisi

$$C_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_1} \int_0^T x(t)y(t + \tau)dt$$

⚠ Çapraz ilişkide fonksiyon sırası önemlidir C_{xy} durumunda x sabit tutulur y kaydırılır.

$$C_{yx}(\tau) = \frac{1}{T_1} \int_0^T y(t)x(t + \tau)dt$$

$$C_{xy}(-\tau) = \frac{1}{T_1} \int_0^T x(t)y(t - \tau)dt$$

$p=t-\tau$ dönüşümü yaparsak

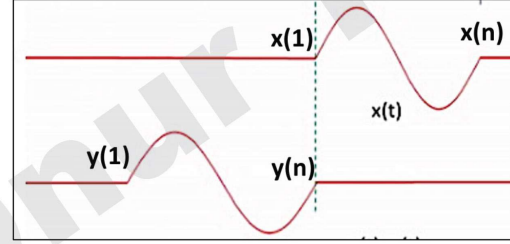
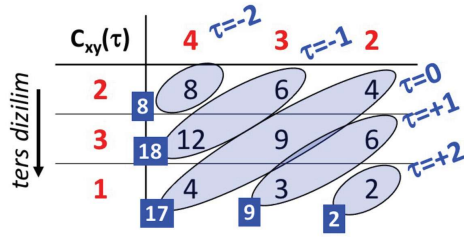
$$C_{xy}(-\tau) = \frac{1}{T_1} \int_0^T x(p + \tau)y(p)dp$$

$$C_{xy}(-\tau) = \frac{1}{T_1} \int_0^T y(p)x(p + \tau)dp$$

$$C_{xy}(-\tau) = C_{yx}(\tau)$$

Çapraz İlişki

$x(4, 3, 2)$ ve $y(1, 3, 2)$ sinyallerinin çapraz ilişkisinin hesaplanması



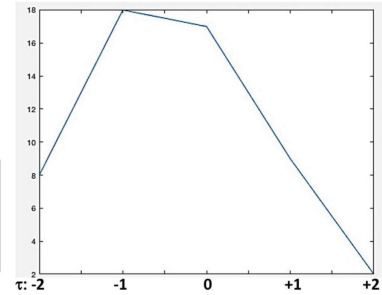
$$C_{xy}(-2) = 8 \quad C_{xy}(-1) = 18 \quad C_{xy}(0) = 17 \quad C_{xy}(+1) = 9 \quad C_{xy}(+2) = 2$$

$$C_{xy}(\tau) = (8, 18, 17, 9, 2)$$

Normalize edersek:

$$C_{xy}(\tau) = (0.4444, 1.0000, 0.9444, 0.5000, 0.1111)$$

```
%
x=[ 4 3 2 ];
y=[ 1 3 2 ];
Cxy=xcorr(x,y)
```



Geçici Sinyallerde İlişki

Geçici (periyodik olmayan) sinyallerde özilişki ve çapraz ilişki

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt$$

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t+\tau)dt$$

Geçici sinyalin sıfır kaydırma değeri ($\tau=0$) için öz ilişkisi

$$C_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt$$

Sinyalin her bir örnek noktasındaki genliğinin kareleri toplamı enerjisini verir.

Bu bağıntı, $x(t)$ sinyalinin **toplam enerjisini** verir. ⚠

Periyodik olmayan sinyaller için de bakışlılık (çift fonk.) özelliği geçerlidir.

$$C_{xx}(-\tau) = C_{xx}(\tau)$$

Geçici Sinyallerde İlişki

Rastgele verilerde özilişki $-\infty < t < +\infty$ aralığındaki bir süreçtir. Sinyalin boyu T olduğunu düşünürsek

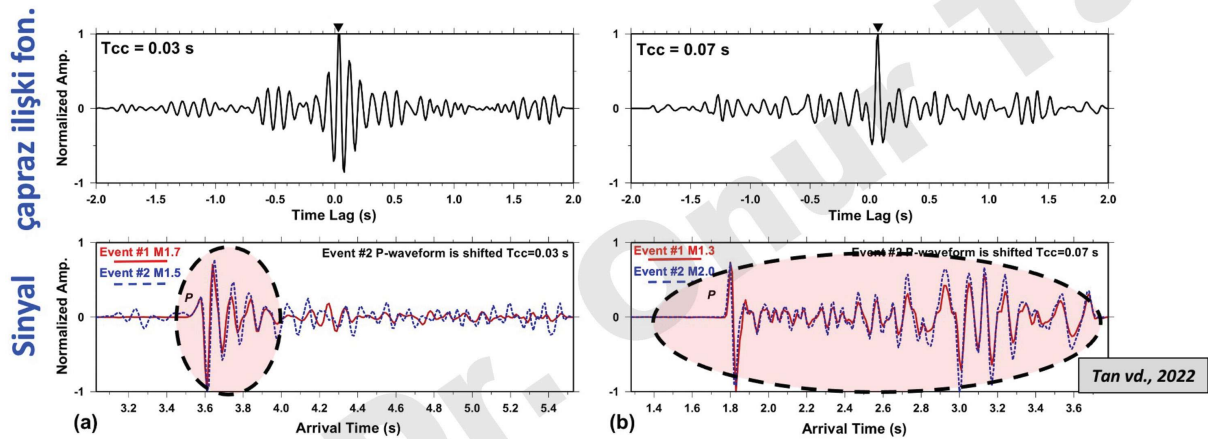
$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)x(t + \tau)dt$$

Özilişki $-T$ ve $+T$ aralığında hesaplandığından veri boyu $2T$ olacaktır.

Gerçekte sinyal sonsuz uzunluktadır. Bunun bir parçasının özilişkisine bakıldığında *yaklaşık* bir değer hesaplanmış olur.

Çapraz İlişki

Yaklaşık 2.5 uzunluğunda P dalgasını içeren deprem kaydı çiftlerinin çapraz ilişkileri.



Soldaki çift için sadece kısa bir aralıkta benzerlik olduğundan, çapraz ilişki fonksiyonu $\tau=0$ s kayma anında çok sivri değildir.

Sağdaki örnekte neredeyse 2s süre içerisinde daha çok benzerlik olduğundan fonksiyon ince pik şeklindedir; bu da iki sinyalin bir birine ne kadar çok benzediğini gösterir.

Bu haftalık bu kadar ...

