



Doç. Dr. Onur TAN

İstanbul Üniversitesi – Cerrahpaşa
Mühendislik Fakültesi
Jeofizik Mühendisliği Bölümü

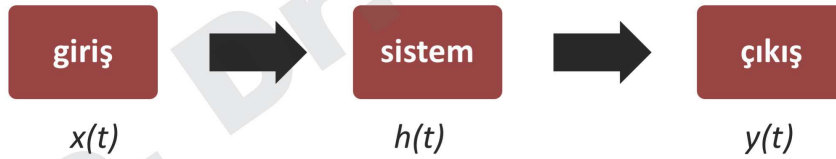
Doğrusal Sistemler

Doğrusal Sistemler

Bir sinyali (dalga) başka bir sinyale (dalga) dönüştüren düzeneklere **sistem** [system] denir. Sistem, bir uyarıya (etkiye) karşılık olarak bir tepki gösterir.

Sisteme giren bir sinyal, matematiksel bir dönüşümle çıkış sinyaline dönüştürülür.

Giriş sinyali, x , sistemin dönüştürme operatörü H tarafından bir y çıkış sinyaline dönüştürülür. Bu işlem $y(t) = h[x(t)]$ şeklinde gösterilir.



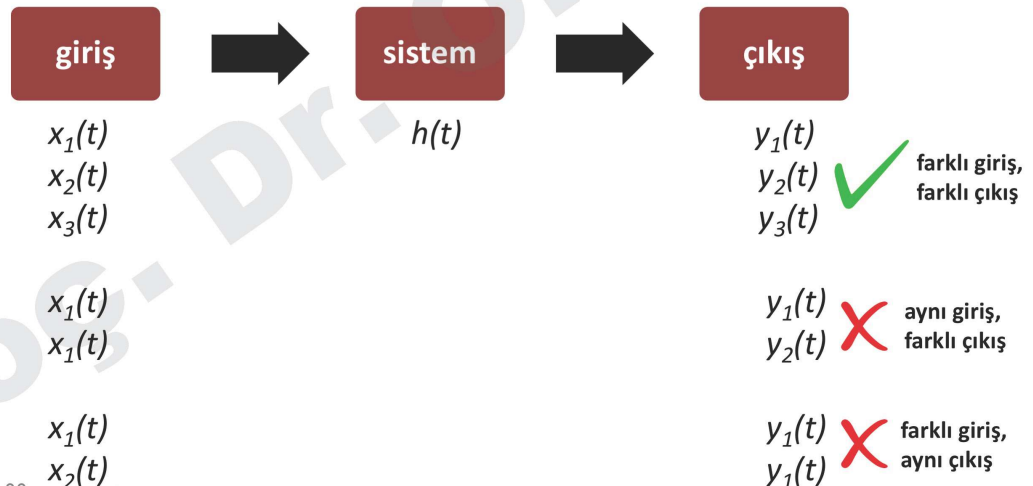
Doğrusal Sistemler

Sistemler,

- doğrusal / doğrusal olmayan
- zaman bağımlı / bağımsız
- kararlı / kararsız

şeklinde tanımlanabilirler.

- Doğrusal sistemlerde, giren ve çıkan sinyaller arasında doğrusal bir ilişki vardır.
- Bir girişin bir yalnız bir çıkışı olur. Aynı girişe ait iki veya daha fazla çıkış olmaz.
- Yerküre, genel olarak doğrusal bir sistem gibi davranır.



Doğrusal Sistemler

Doğrusal Sistemlerin Özellikleri

1) Toplama özelliği

$$\begin{array}{lll} x_1(t) & \rightarrow & h(t) \rightarrow y_1(t) \\ x_2(t) & \rightarrow & h(t) \rightarrow y_2(t) \\ x_1(t) + x_2(t) & \rightarrow & h(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t) \end{array}$$

Doğrusal sisteme iki sinyalin toplamı girerse çıktılarda toplamlarına eşittir.

2) Çarpma özelliği

$$\begin{array}{lll} x_1(t) & \rightarrow & h(t) \rightarrow y_1(t) \\ a \cdot x_1(t) & \rightarrow & h(t) \rightarrow a \cdot y_1(t) \end{array}$$

Yerküre, genel olarak doğrusal bir sistem gibi davranır.

Doğrusal Sistemler

3) Gecikme özelliği

Doğrusal sisteme gecikmeli giren sinyale karşılık çıkış da gecikir. Diğer bir deyişle, doğrusal sistemlerde sistemin karakteristiği, özellikleri zamanla değişmez. Doğrusal sistemler zamandan bağımsızdır.

$$\begin{array}{lll} x_1(t) & \rightarrow & h(t) \rightarrow y_1(t) \\ x_1(t+\tau) & \rightarrow & h(t) \rightarrow y_1(t+\tau) \end{array}$$

Doğrusal Sistemler

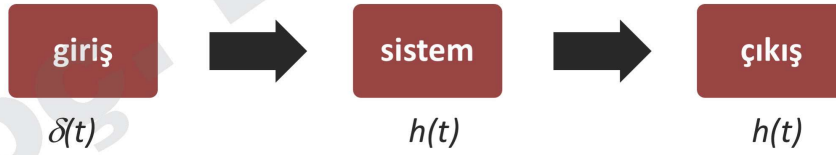
4) Doğrusal düzenekler, giriş ve çıkış verileri arasındaki ilişkiyi tanımladığından, bilinen bir giriş verisinin yarattığı çıkış verisi, sistemi belirleyen özellikleri de içerir.

Sistem karakteristiği, o sistemde birim dürtü fonksiyonunun yarattığı çıkış verisiyle belirlenir.

Doğrusal bir düzeneğin giriş verisi $\delta(t)$ olduğunda, çıkış verisi $h(t)$ olsun.

$h(t)$ fonksiyonu doğrusal düzeneğin **birim tepki fonksiyonu** [impulse response] olarak bilinir.

Doğrusal düzeneğin girişinde $t = 0$ anında uygulandığından $t < 0$ için sistemin çıkışında bir şey yoktur. Eğer özellikle koşul olarak verilmemişse, doğrusal düzenekler, $t < 0$ için dinlenmede sayılır. Doğrusal düzeneklerin bu özelliği **nedensellik** [causality] olarak bilinir.

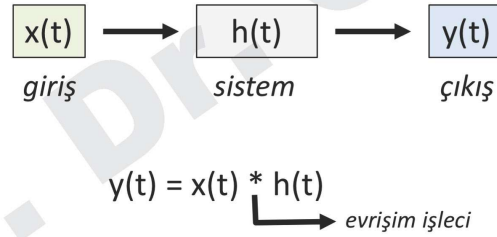


Evrişim / Konvolüsyon

Evrişim / Konvolüsyon

Evrişim/konvolüsyon [convolution] uzun yıllardır bilinen ve uygulanan matematiksel bir işlemdir ve farklı terimlerle anılmaktadır: Yığışım integrali [superposition int.], tarama [scanning] integrali, Duhamel integrali, yuvarlatma [smoothing] integrali vb.

Fizikte ise bir işlem olarak ele alınır ve bir aygıtla kaydedilen bir büyüklük üzerinde aygıtın etkisini belirlemek amacıyla kullanılır.



Bir cihaza $x(t)$ sinyali girerse, cihazın yapısı gereği bir tepki oluşturacak ve giriş sinyalini değiştirerek çıkış sinyali verecektir. Çıkış sinyali giriş sinyali ile cihazın tepki fonksiyonunun evrişimidir.

Evrişim / Konvolüsyon

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t + \tau) dt$$

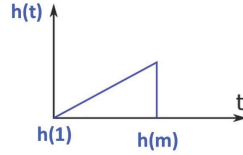
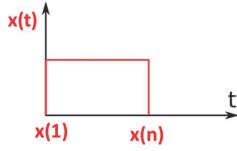
çapraz ilişki
(kaymanın, τ , fonksiyonu)

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

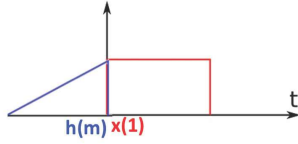
x, τ zamanına bağlı
 $h, -\tau$ zamanına bağlı (tersine çevrilmiş sinyal)

konvolüsyon
(zamanın, t , fonksiyonu)

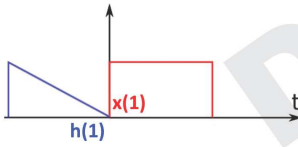
Evrişim / Konvolüsyon



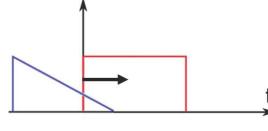
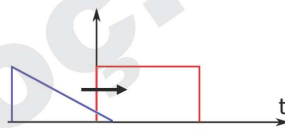
$$y(t) = x(t) * h(t)$$



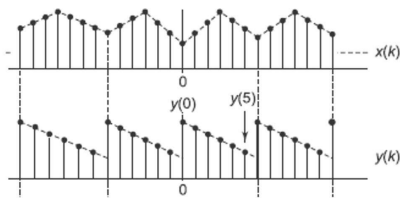
$h(t)$ ters çevrilmez ise iki sinyalin ilk kaydırmada, x 'in 1. değeri ile h 'in sonuncu değeri çarpılmış olur (çapraz ilişkideki gibi).



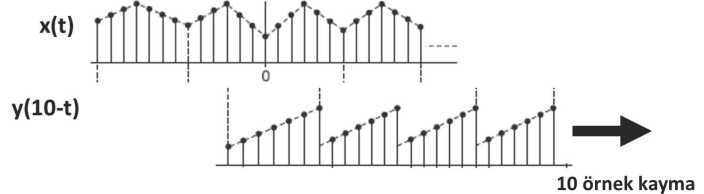
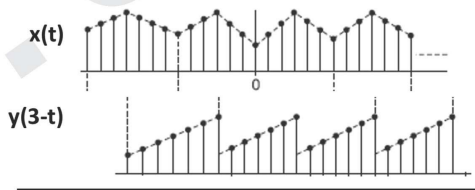
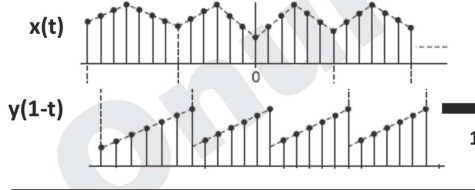
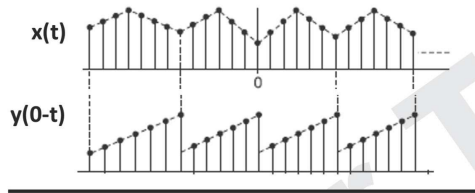
Bu anda olması gereken iki sinyalinde ilk değerlerinin çarpılmasıdır. Bu nedenle evrişim işleminde 2. sinyal ters çevrilerek işleme sokulur.



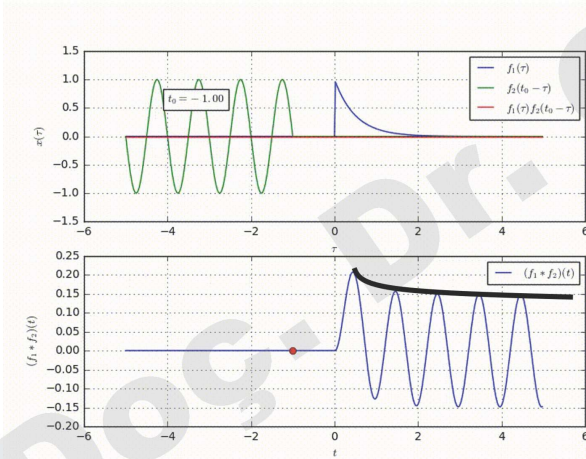
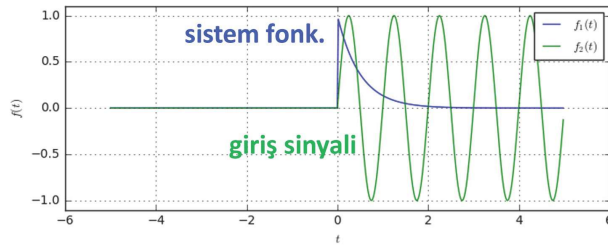
Evrişim / Konvolüsyon



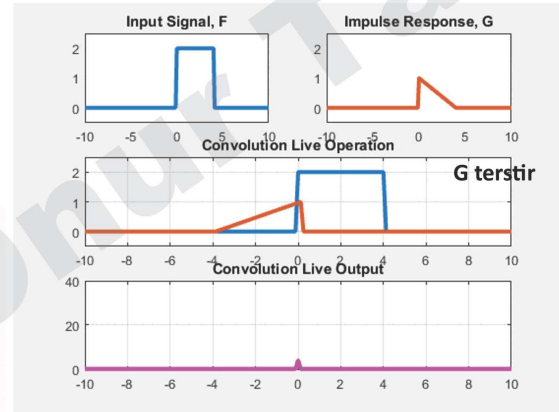
tüm noktalar karşılıklı çarpılır ve toplanır.



Evrişim / Konvolüsyon



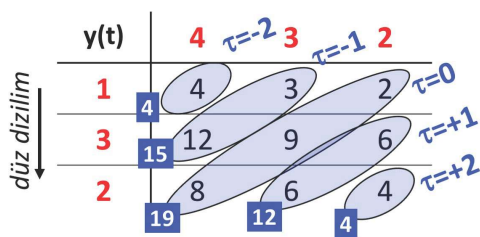
<https://dspillustrations.com/pages/posts/misc/convolution-examples-and-the-convolution-integral.html>



<https://quincyaflint.weebly.com/academic-material>

Evrişim / Konvolüsyon

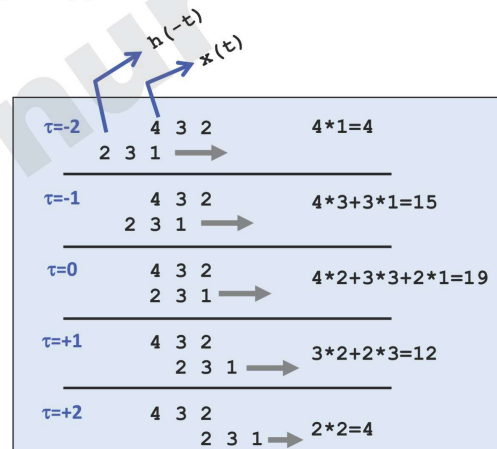
$x(4, 3, 2)$ ve $h(1, 3, 2)$ sinyallerinin evrişimi



$$y(1) = 4 \quad y(2) = 15 \quad y(3) = 19 \quad y(4) = 12 \quad y(5) = 4$$

$$y = (4, 15, 19, 12, 4)$$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$



```
%
x=[ 4 3 2 ];
h=[ 1 3 2 ];
f=conv(x,h)
```

Evrişim / Konvolüsyon

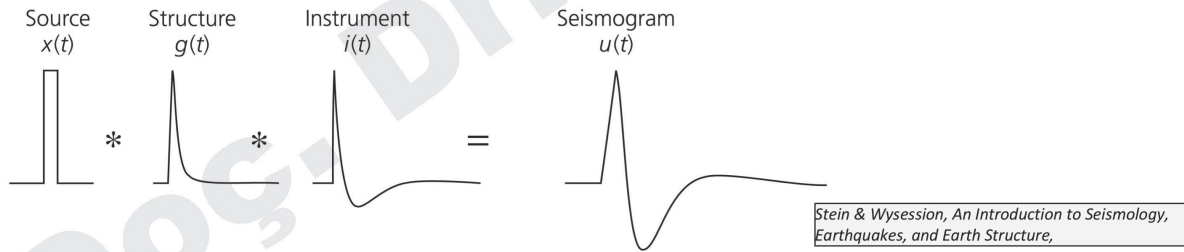
Evrişim ile resmin bulanıklaştırılması:



```
rgb = imread('peppers.png');  
h = ones(5,5)/25;  
rgb2 = imfilter(rgb,h,'conv');
```

https://www.mathworks.com/discovery/convolution.html?s_tid=srchtitle_support_results_2_convolution

Figure 6.3-5: Seismogram as the convolution of the source, structure, and instrument signals.



Deprem kaynağı, yer yapısı ve sismometrenin etkisi bir fonksiyon olarak düşünülür ve bunların konvolüsyonu ile sentetik (yapay) sismogram üretilir.

Evrişim / Konvolüsyon

Evrişim özellikleri

- Kümülatif Özelliği : $x * h = h * x$

- Birleşme Özelliği : $x * (g * h) = (x * g) * h$

- Dağılma Özelliği : $x * (g + h) = x * g + x * h$

- Birim iğnecik (impuls) fonk. ile evrişim fonksiyonun kendisine eşittir:

$$x * \delta = x \quad x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t)$$

- Evrişim her ortamda yapılıır

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \text{Zaman Ort.}$$

$$Y(\omega) = X(\omega) * H(\omega) \quad \text{Frekans Ort.}$$

$$y(\lambda) = x(\lambda) * h(\lambda) \quad \text{Uzaklık Ort. (dalga boyu)}$$

$$Y(k) = X(k) * H(k) \quad \text{Dalga Sayısı Ort.}$$

Evrişim

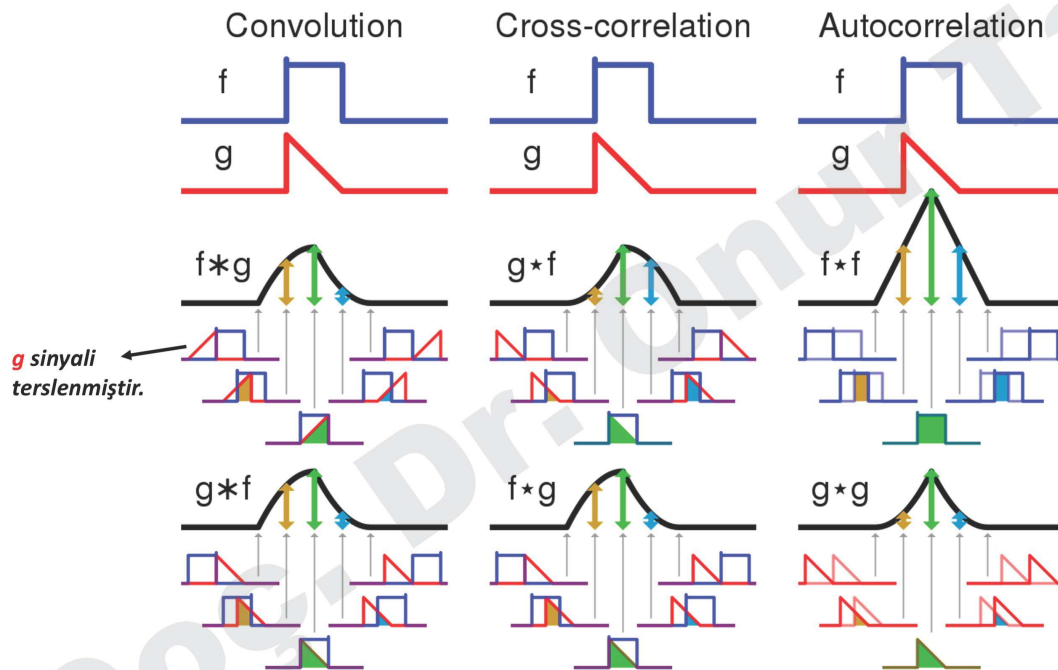
- Zaman ortamında evrişim frekans ortamında çarpmaya eşittir (yada tersi)

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \Leftrightarrow \quad Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega) \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = x(t) * h(t) \quad (\omega = 2\pi f)$$

Not: Bu özelliğin ispatı için Fourier Transformu konusundan sonra yapılacaktır.

İlişki ve Evrişim İşlem Karşılaştırması



Ödev

1) $x(t) = (0 \ 2 \ 5 \ 10 \ -3 \ 0 \ 5 \ 0)$
 $y(t) = (0 \ -5 \ 1 \ 20 \ 10 \ -6 \ 1 \ 2 \ 0)$

- $x(t)$ ve $y(t)$ 'nin çapraz ilişkisini (C_{xy}) tablo yöntemi ile hesaplayın.
- x , t ve C_{xy} grafiklerini çizin.

2) Yer içindeki tabakaların (sistem) yansıma katsayıları

$$h(t) = (0 \ 0 \ 0 \ 0.5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -0.2 \ 0)$$

olsun. Yer içine gönderilen sinyal ise

$$s(t) = (2 \ 1 \ -1 \ 0 \ +0.5 \ 0 \ -0.1 \ 0 \ 0)$$

şeklinde genlik değerlerine sahip olsun.

- Yer içine gönderilen $s(t)$ sinyalinin, tabakalı yapı (sistem, $h(t)$) içerisinde seyahat ettikten sonra yer yüzünde kayıt edilen $y(t)$ sinyalini, tablo yöntemiyle evrişim işlemini kullanarak hesaplayınız.
- $s(t)$ ve $y(t)$ sinyallerinin grafiğini çizin.

Not: İşlemler elle ve çizimler milimetrik kağıda yapılacaktır.

İsteyenler MATLAB kullanarak ayrıca hesaplayıp çizdirebilirler.