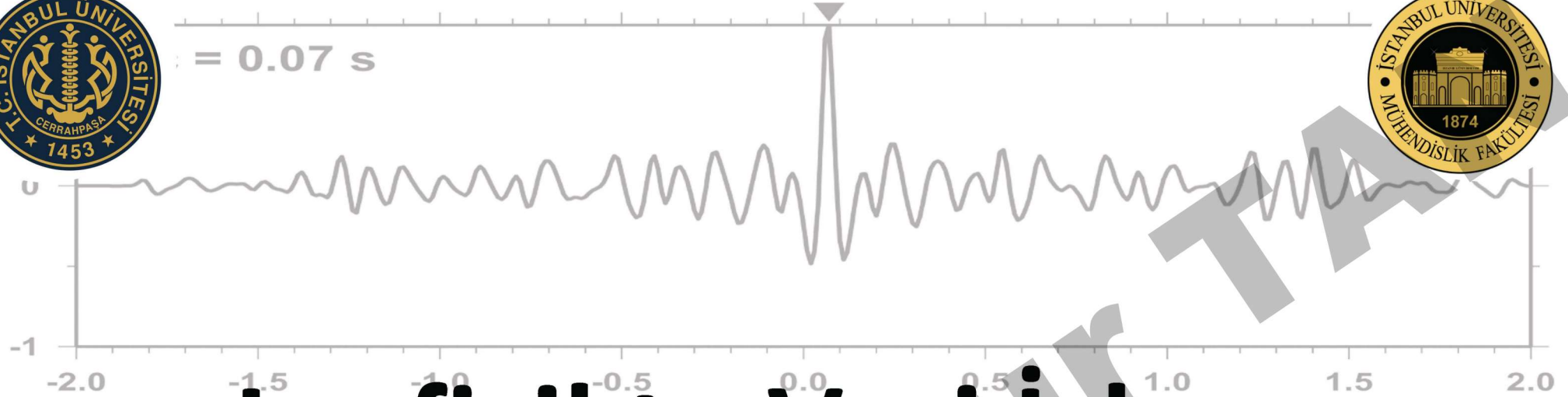
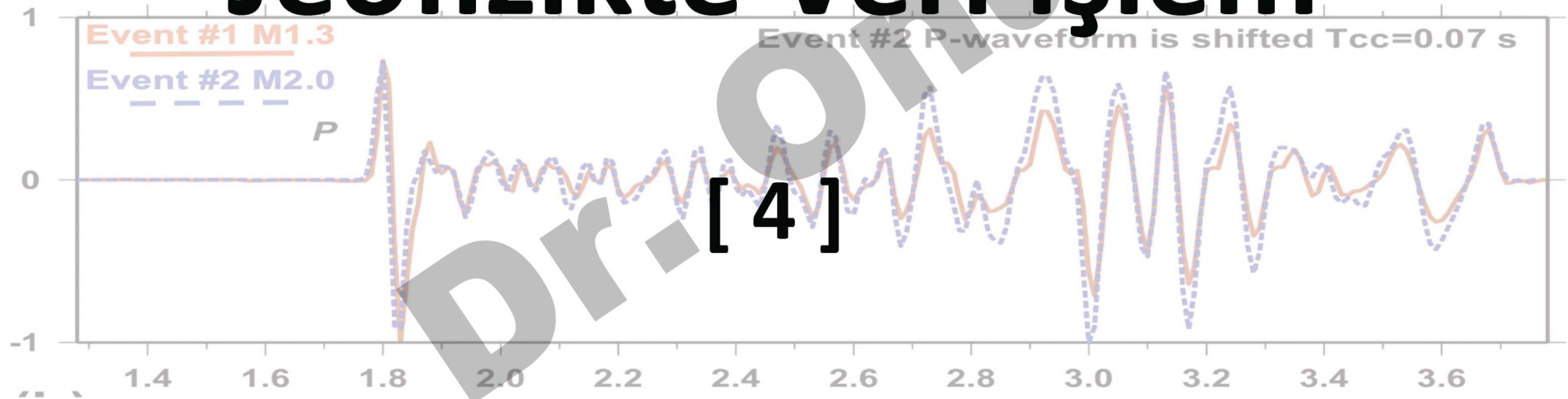




$\Delta t = 0.07 \text{ s}$



Jeofizikte Veri İşlem



Doç. Dr. Onur TAN

İstanbul Üniversitesi – Cerrahpaşa
Mühendislik Fakültesi
Jeofizik Mühendisliği Bölümü

Fourier Serileri

Fourier Teorisi

Fourier Teorisi (1807)

Bazı koşulları sağlayan herhangi bir $f(t)$ fonksiyonu sonsuz sayıda trigonometrik fonksiyonların toplamı olarak ifade edilebilir.

- 1) Periyodik Fourier Teorisi: Fourier analizinde sadece temel frekansa ve katlarına (harmoniklerine) bakılabilir.
- 2) Aperiodyk Fourier Teorisi: Fourier analizinde bütün frekanslara bakılabilir.



Jean-Baptiste Joseph Fourier
(1768 – 1830)

Periyodik bir fonksiyon belirli koşulları sağlıyorsa sonlu sayıda sinüsoidal fonksiyonun toplamı olarak düşünülebilir. Bu durumda sinüsoidallerin

- 1) Genlik
 - 2) Frekans
 - 3) Fazları
- bilinmelidir.

Dirichlet Koşulları

Fourier Teorisi'nin geçerli olması gereken koşullar **Dirichlet Koşulları** (1829) olarak bilinir:

1) $f(t)$ periyodik olmalıdır. $f(t) = f(t+nT)$ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

Eğer $f(t)$ periyodik olmamakla birlikte sınırlı bir aralıkta tanımlanmışsa, tanımlama aralığında sinüsoidal fonksiyonlar toplamı ile $f(t)$ 'ye yaklaşılr.

2) $f(t)$ fonksiyonu sınırlı sayıda süreksizlikleri içermelidir.

3) $f(t)$ fonksiyonu yine sınırlı sayıda minimum ve maksimum değere sahip olmalıdır.

4) Sonsuz aralıkta $f(t)$ 'nin integrali sonsuzdan küçük (sınırlı) olmalıdır.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt < \infty$$

Fourier Teorisi

Bir periyodik sinyal, sin ve cos'lerin toplamı ile ifade edilebilir:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos(1\omega_0t) + a_2\cos(2\omega_0t) + a_3\cos(3\omega_0t) + \dots \\ \dots + b_1\sin(1\omega_0t) + b_2\sin(2\omega_0t) + b_3\sin(3\omega_0t) + \dots$$

$$\text{Açısal frekans} \\ \omega = 2\pi f$$

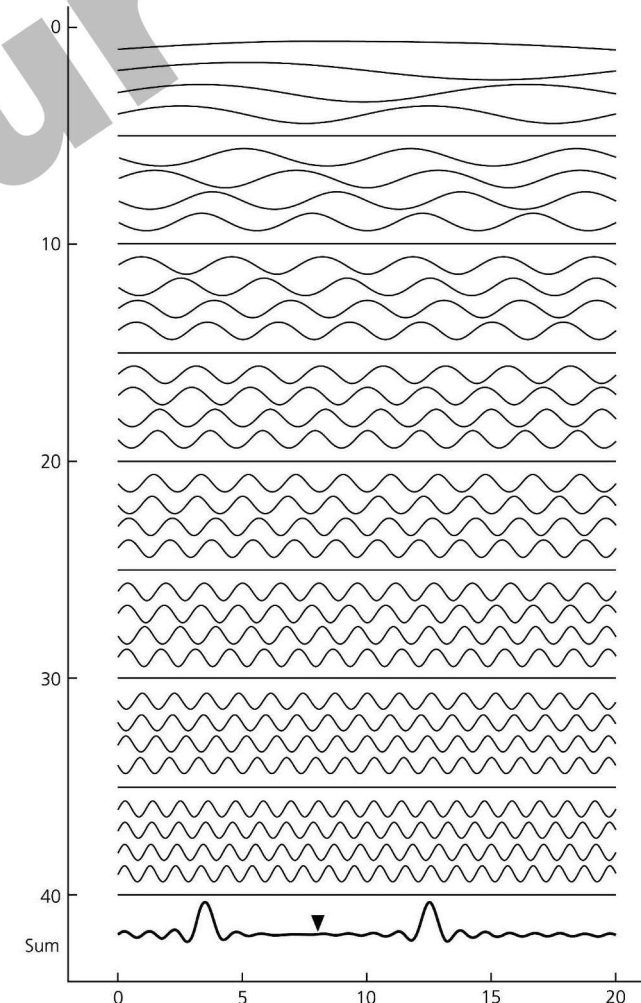
$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\cos(n\omega_0t) + b_n\sin(n\omega_0t))$$

Fonksiyonun Fourier serisine açılımına **harmonik analiz** denir.

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T_0$$

ω_0 : temel frekans

$n\omega_0$: ω_0 'ın harmonikleri



Fourier Serileri

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$$

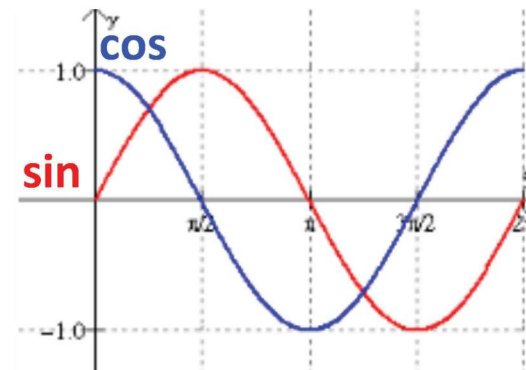
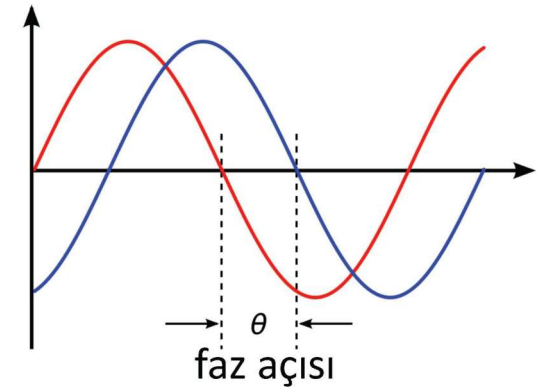
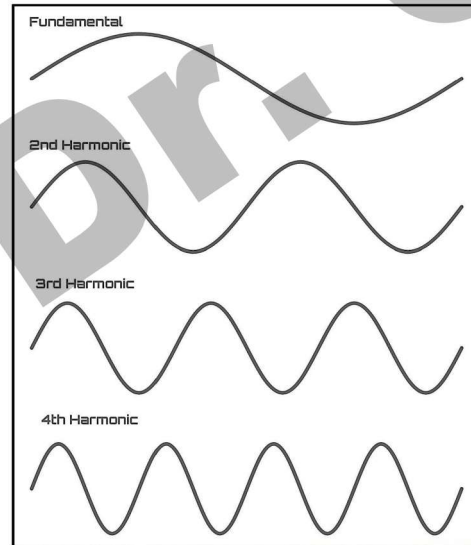
$n\omega_0$	: n'inci harmonik
c_n	: harmoniklerin genlikleri
θ_n	: harmoniklerin faz açıları
a_n, b_n	: Fourier katsayıları

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \quad (\text{temel frk.})$$

$$2\omega_0 = 2(2\pi f_0) \quad (2. \text{ harmonik})$$

$$3\omega_0 = 3(2\pi f_0) \quad (3. \text{ harmonik})$$

$$4\omega_0 = 4(2\pi f_0) \quad (4. \text{ harmonik})$$



sin ve cos
arasında $\pi/2$
kadar faz kayması
vardır

Fourier Serileri

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$$

$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ eşitliğini kullanırsak Fourier serisini

$$f(t) = c_0 \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \rightarrow \theta_n = \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n} \text{ 'dir ve açılımı aşağıda verilmiştir.}$$

$$c_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n) = c_n \cos(n\omega_0 t) \cos(\theta_n) + c_n \sin(n\omega_0 t) \sin(\theta_n)$$

$$\underbrace{c_n \cos(\theta_n) \cos(n\omega_0 t)}_{a_n \cos(n\omega_0 t)} + \underbrace{c_n \sin(\theta_n) \sin(n\omega_0 t)}_{b_n \sin(n\omega_0 t)}$$

$$\begin{aligned} c_n \cos(\theta_n) &= a_n \\ c_n \sin(\theta_n) &= b_n \text{ sabitleri olsun} \end{aligned}$$

$$\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = [(c_n \cos(\theta_n))^2 + (c_n \sin(\theta_n))^2]^{1/2} = c_n \underbrace{\sqrt{\cos^2 \theta_n + \sin^2 \theta_n}}_1 = c_n$$

$$\theta_n = \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n}$$

Fourier Serileri

Fourier Katsayılarının (a_n, b_n) Belirlenmesi:

Verilen bir $f_k(t)$ fonksiyon kümesinde iki fonksiyonun $t_1 < t < t_2$ aralığında birbirine dik olması için

$$\int_{t_1}^{t_2} f_m(t) f_n(t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \text{sabit}, & m = n \end{cases}$$

diklik koşulunun sağlanmış olması gerekir.

Fourier Serileri

$\{ \cos(1\omega_0 t), \cos(2\omega_0 t), \cos(3\omega_0 t), \dots, \sin(1\omega_0 t), \sin(2\omega_0 t), \sin(3\omega_0 t) \dots \}$

kümesinde $-T/2 < t < +T/2$ aralığında dik fonksiyonları bulalım.

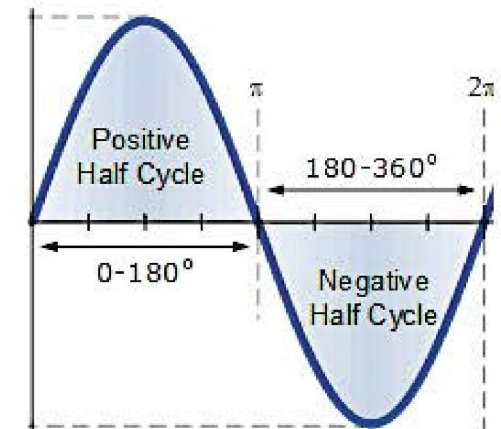
$$\int_{-T/2}^{+T/2} \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{T}{2}, & m = n \end{cases} \quad \int_{t_1}^{t_2} f_m(t) f_n(t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \text{sabit}, & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-T/2}^{+T/2} \sin(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{T}{2}, & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-T/2}^{+T/2} \sin(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = 0 \quad \text{bütün } n, m \text{ değerleri için sıfır}$$

$$\int_{-T/2}^{+T/2} \cos(n\omega_0 t) dt = 0$$

$$\int_{-T/2}^{+T/2} \sin(n\omega_0 t) dt = 0 \quad \text{bütün } n \text{ değerleri için sıfır}$$



sin ve cos fonksiyonu alanları (periyot sınırları içinde) integrali daima 0 olur.

Fourier Serileri

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$$

her iki taraf $\cos(m\omega_0 t)$ ile çarpalım ve $\pm T/2$ aralığı için integralini alalım

$$\int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt = \underbrace{\int_{-T/2}^{+T/2} \frac{1}{2} a_0 \cos(n\omega_0 t) dt}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-T/2}^{+T/2} (a_n \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) + \underbrace{b_n \cos(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t)}_0) dt$$

$m=n$ olmalı

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-T/2}^{+T/2} a_n \underbrace{\cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t)}_{T/2} dt$$

Fourier Serileri

$$\int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt = a_n T/2$$

$m=n$ olmalı

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

her iki taraf sin ile çarpılırsa ve benzer işlem yapılırsa

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

Fourier Serileri

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$$

a_0 'ın belirlenmesi için her iki tarafın integrali alınır. Σ kısmı kurallar nedeni ile 0 olur.

$$\int_{-T/2}^{+T/2} f(t) dt = \int_{-T/2}^{+T/2} \frac{1}{2}a_0 dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{\int_{-T/2}^{+T/2} a_n \cos(n\omega_0 t) dt}_0 + \underbrace{\int_{-T/2}^{+T/2} b_n \sin(n\omega_0 t) dt}_0 \right)$$

$$\int_{-T/2}^{+T/2} f(t) dt = \frac{1}{2}a_0 t \Big|_{-T/2}^{+T/2} = \frac{1}{2}a_0 \left(\frac{T}{2} + \frac{T}{2} \right)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) dt$$

Fourier Serileri

Özetle ...

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$$

şeklinde verilen Fourier serisi denklemi

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\cos(n\omega_0 t) + \phi_n) \quad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

şeklinde de yazılabilir.

$c_n (\cos(n\omega_0 t) + \phi_n)$ genel terimine $f(t)$ 'nin n . harmonik fonksiyonudur.

Fourier Serileri

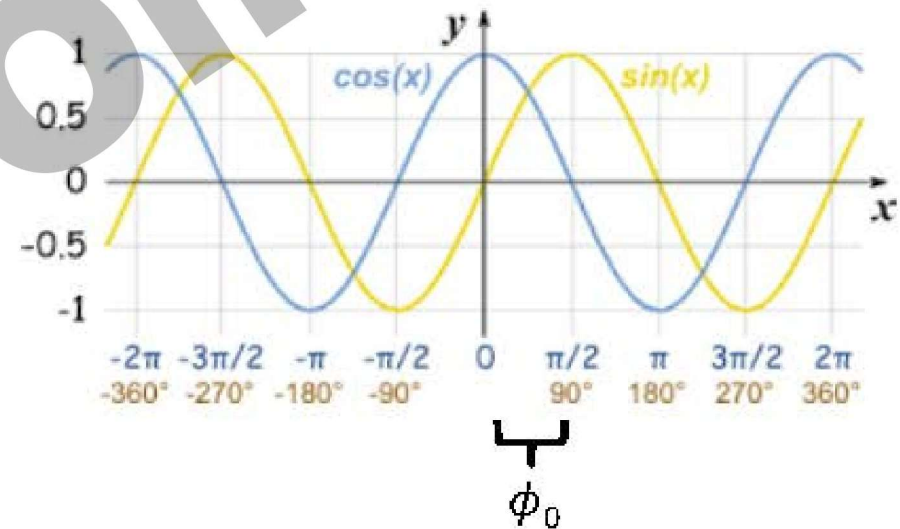
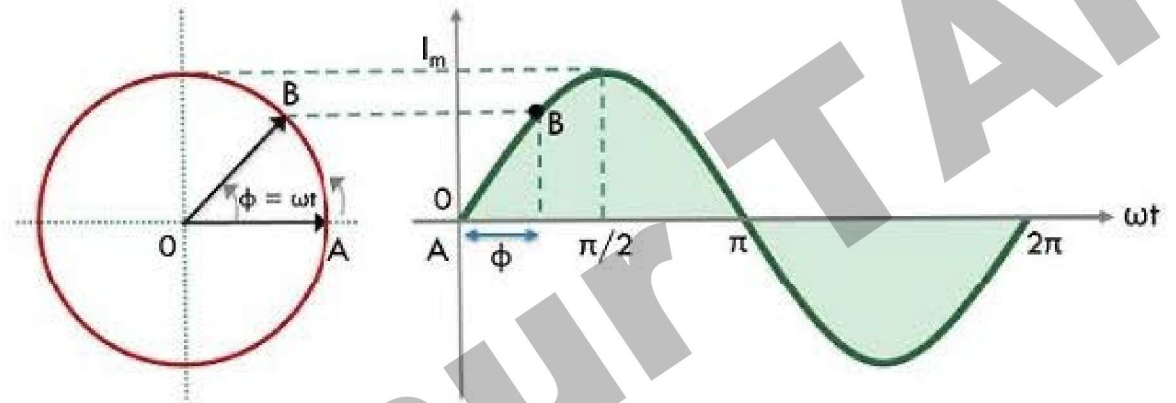
$$c_n (\cos(n\omega_0 t) + \phi_0)$$

ϕ_0 faz açısı

$$\phi_0 = \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n}$$

$$\sin(\omega_0 t) = \cos(\omega_0 t - \pi/2)$$

$$\cos(\omega_0 t) = \sin(\omega_0 t + \pi/2)$$



Fourier Serileri

Çift ve tek periyodik fonksiyonların Fourier serisi

$f(-t) = f(t)$ çift fonksiyonu için $b_n = 0$ olacaktır, ve Fourier serisi aşağıdaki gibidir:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) \rightarrow (\text{kosinüs serisi})$$

$f(-t) = -f(t)$ tek fonksiyonu için $a_0 = 0$ ve $a_n = 0$ olacaktır, ve Fourier serisi aşağıdaki gibidir:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t) \rightarrow (\text{sinüs serisi})$$

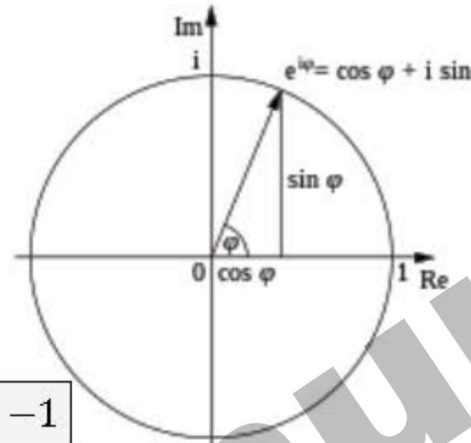
Euler Eşitlikleri

Euler Eşitlikleri

Euler eşitlikleri [Euler's formula]
trigonometrik fonksiyonlarla karmaşık
üstel fonksiyon arasındaki ilişkiyi kurar.

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

$$i = -1$$



Leonhard Euler
(1707-1783)

$$e^{in\omega_0 t} = \cos(n\omega_0 t) + i\sin(n\omega_0 t)$$

$$e^{-in\omega_0 t} = \cos(n\omega_0 t) - i\sin(n\omega_0 t)$$

Buradan hareketle Fourier serilerindeki $\sin$ ve $\cos$
ifadelerini şu şekilde yazabiliriz:

$$\begin{aligned}\cos(n\omega_0 t) &= \frac{1}{2} [e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}] \\ \sin(n\omega_0 t) &= \frac{1}{2i} [e^{in\omega_0 t} - e^{-in\omega_0 t}]\end{aligned}$$

Euler Eşitlikleri

Euler eşitlikleri ile Fourier serilerini yazmak istersek

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$$

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{1}{2} [e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}] + b_n \frac{1}{2i} [e^{in\omega_0 t} - e^{-in\omega_0 t}] \right)$$

$$f(t) = \underbrace{\frac{1}{2}a_0}_{c_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{2}(a_n - ib_n)}_{c_n} e^{in\omega_0 t} + \underbrace{\frac{1}{2}(a_n + ib_n)}_{c_{-n}} e^{-in\omega_0 t} \right)$$

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} + c_{-n} e^{-in\omega_0 t} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{1}{2}a_n - \frac{i}{2}b_n$$

Fourier Dönüşümü (Fourier Transformu)

Fourier Dönüşümü

Periyodik olmayan olaylar bir kez meydana gelir, tekrarlanmaz.
Periyodik olmayan bu tür fonksiyonlar için Fourier serisi kullanılmaz.
Bu durumda incelenen T boyundaki veri sonsuzda periyodikmiş gibi düşünülür.
Uygun bir açılım elde edilebilir.

Periyodik olmayan fonksiyonların Fourier serileri ile gösterilebilmesini Fourier integrali sağlar.

Her sonlu $(-T/2, +T/2)$ aralığında Dirichlet koşullarını sağlamayan ve $(-\infty, +\infty)$ aralığında yakınsayan $f(t)$ fonksiyonunun karmaşık Fourier serisi,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \quad \omega_0 = 2\pi/T$$

şeklinde olduğu daha önce görmüştük.

Fourier Dönüşümü

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

$$\left[\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \\ c_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} a_n - \frac{i}{2} b_n \end{aligned} \right.$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \right] e^{in\omega_0 t}$$

Fourier Dönüşümü

$$\frac{1}{T} = \omega_0/2\pi$$

$$\omega_0 \rightarrow \Delta\omega$$

(sonsuz küçük olsun)

$$t = x \rightarrow dt = dx$$
 dönüşümü yapalım

$T \rightarrow \infty$ karmaşık Fourier serisinde T limitte sonsuz alındığında temel frekans ω_0 sonsuz küçüklükte olacaktır. Bu limit kuramından $-T/2$ 'den $+T/2$ 'ye kadar olan integral limitlerini $(-\infty, +\infty)$ limitleriyle değiştirerek ve temel frekans ω_0 'ı sonsuz küçük $\Delta\omega$ ile değiştirerek aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-in\Delta\omega x} dx \right] e^{in\Delta\omega t} \Delta\omega$$

$$\Delta\omega \rightarrow d\omega$$
$$n\Delta\omega \rightarrow \omega$$

şeklinde kullanabiliriz.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right\} e^{i\omega t} d\omega$$

Fourier Dönüşümü

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right\} e^{i\omega t} d\omega$$

$$x = t \rightarrow dx = dt$$

Σ yerine $\int$ kullanırsak

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt}_{F(\omega)} \right\} e^{i\omega t} d\omega$$

Aperiyyodik fonksiyonlar için **Fourier Dönüşüm Çifti** elde edilmiş olur:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{+i\omega t} d\omega$$

Fourier Dönüşümü

(Düz veya İleri) Fourier Dönüşümü

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

Zaman (t) ortamındaki bir sinyalin frekans (ω) ortamında gösterimini sağlar.

Ters Fourier Dönüşümü

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{+i\omega t} d\omega$$

Frekans (ω) ortamındaki bir sinyalin zaman (t) ortamında gösterimini sağlar.

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

Fourier Dönüşüm Çifti

$\leftrightarrow$ Fourier çifti sembolü

Fourier Dönüşümü

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \longrightarrow e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i\sin(\omega t)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) [\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)] dt$$

$$F(\omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt}_{R(\omega)} - i \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\omega t) dt}_{I(\omega)}$$

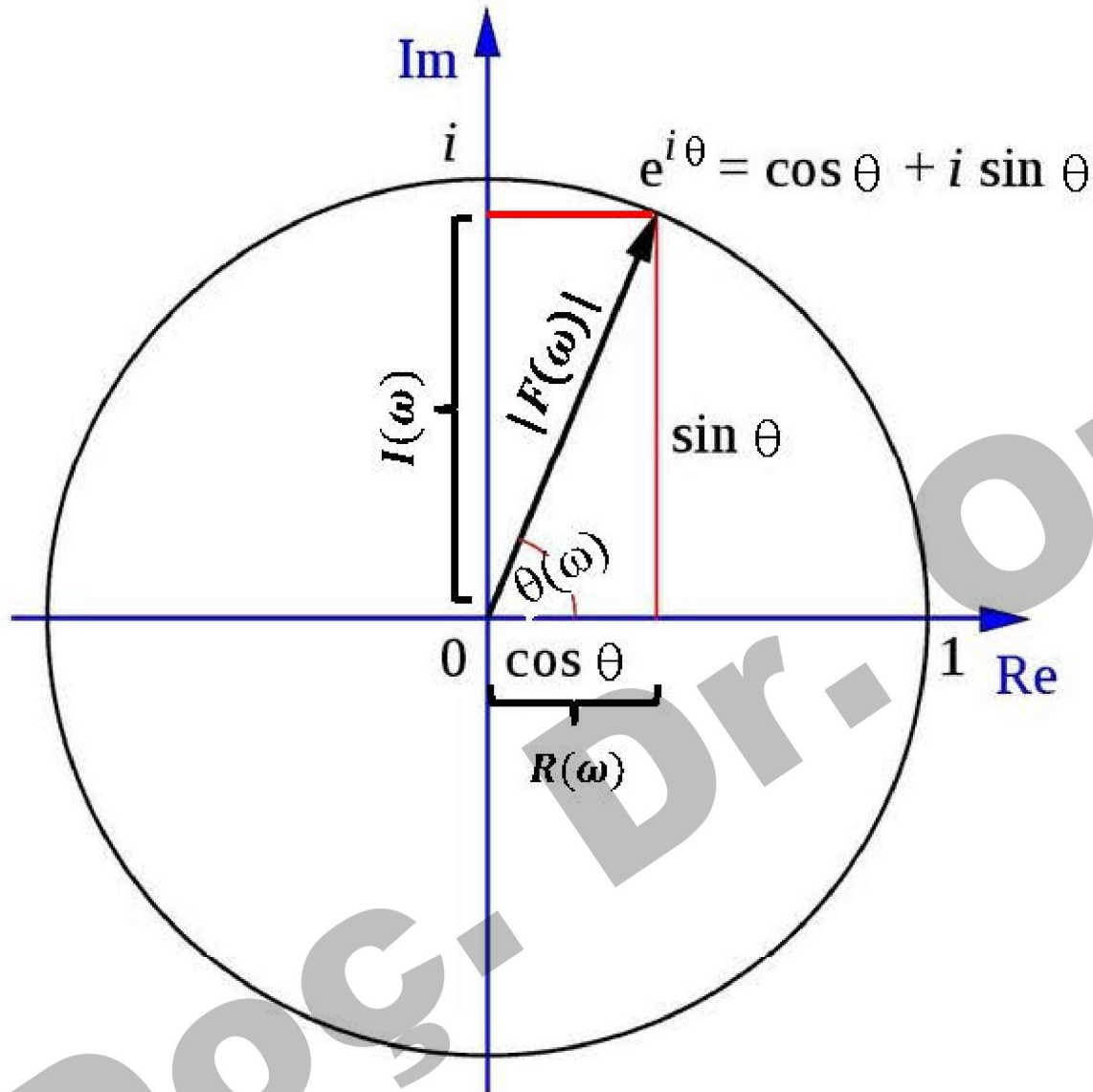
$R(\omega)$

Gerçek Kısım
[Real Part]

$I(\omega)$

Sanal Kısım
[Imaginary Part]

Fourier Dönüşümü



Genlik Spektrumu

$$|F(\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)}$$

Faz Spektrumu

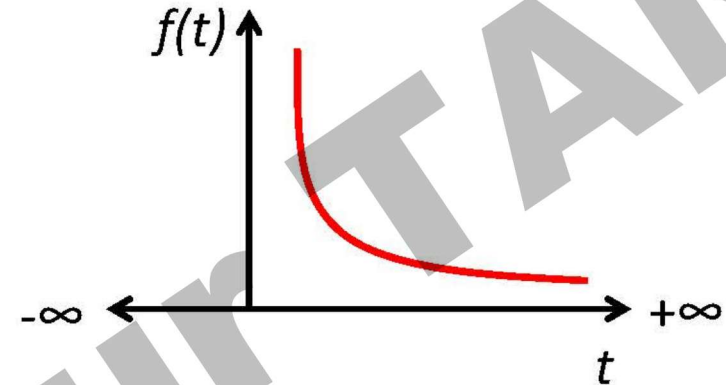
$$\theta(\omega) = \tan^{-1}[I(\omega)/R(\omega)]$$

Fourier Dönüşümü

ÖRNEK:

$$f(t) = \begin{cases} \beta e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$f(t)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü yapınız.



$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta e^{-\alpha t} e^{-i\omega t} dt = \underbrace{\int_{-\infty}^0 \beta e^{-\alpha t} e^{-i\omega t} dt}_0 + \int_0^{+\infty} \beta e^{-\alpha t} e^{-i\omega t} dt = \beta \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+i\omega)t} dt$$

$\int e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a}$

$$= \frac{-\beta}{(\alpha+i\omega)} e^{-(\alpha+i\omega)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{-\beta}{(\alpha+i\omega)} \left(\underbrace{\frac{1}{e^{(\alpha+i\omega)\infty}}}_0 - \underbrace{\frac{1}{e^{(\alpha+i\omega)0}}}_1 \right) = \boxed{\frac{\beta}{\alpha+i\omega}}$$

Fourier Dönüşümü

ÖRNEK:

$$F(\omega) = \frac{\beta}{\alpha + i\omega} \frac{\alpha - i\omega}{\alpha - i\omega} = \underbrace{\frac{\beta \alpha}{\alpha^2 + \omega^2}}_{\text{gerçel}} - i \underbrace{\frac{\beta \omega}{\alpha^2 + \omega^2}}_{\text{sanal}}$$

pay ve paydayı eşlenik ile çarpalım

$$R(\omega) = \frac{\beta \alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \quad I(\omega) = -\frac{\beta \omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$|F(\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)} = \sqrt{\left(\frac{\beta \alpha}{\alpha^2 + \omega^2}\right)^2 + \left(\frac{-\beta \omega}{\alpha^2 + \omega^2}\right)^2} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$

Genlik Spektrumu

$$\theta(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{I(\omega)}{R(\omega)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-\beta \omega}{\alpha^2 + \omega^2} \frac{\alpha^2 + \omega^2}{\beta \alpha}\right) = \tan^{-1} \frac{-\omega}{\alpha}$$

Faz Spektrumu

Bu haftalık bu kadar ...

