ELASTİK DALGA YAYINIMI

Prof.Dr. Eşref YALÇINKAYA

(2016 - 2. DERS)

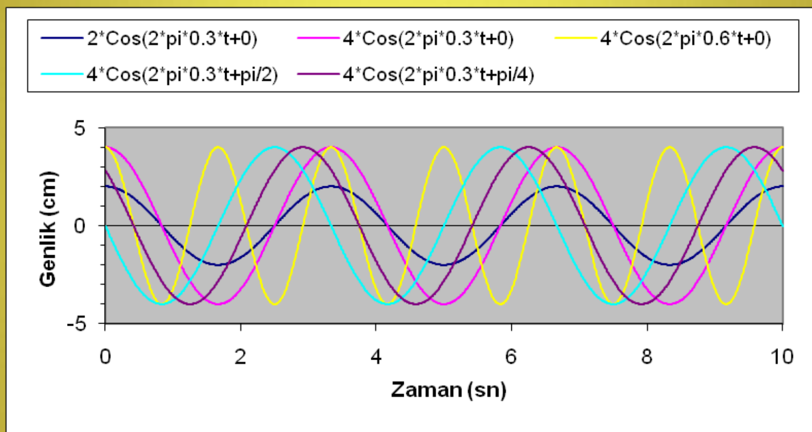
Geçtiğimiz ders;

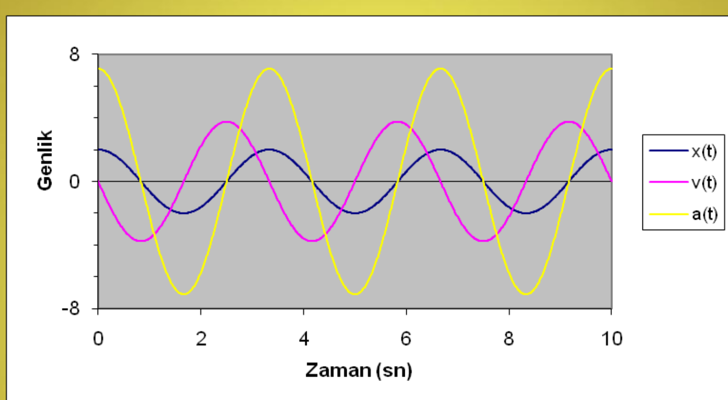
- Titreşim
- Serbest titreşimler
  - Periyodik hareket
  - Basit harmonik hareket

Bu derste;

- Düzgün dairesel hareket
- Sönümlü harmonik hareket

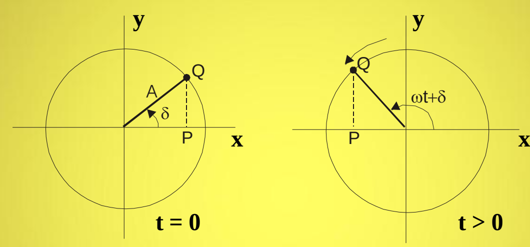
1. Hafta ödevi





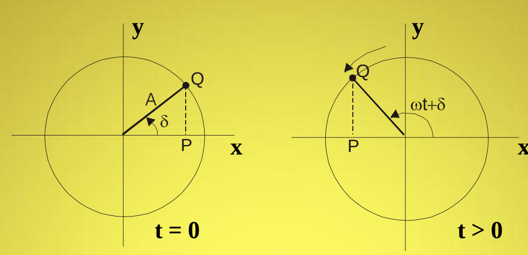
Düzgün Dairesel Hareket

Q noktası, yarıçapı A olan daire üzerinde w (radyan/sn) “açısal hızı” ile hareket etmektedir.



Herhangi bir anda Q’nun *x* ve *y* koordinatları;

$$x(t) = A\cos(wt + \delta)$$
$$y(t) = A\sin(wt + \delta)$$

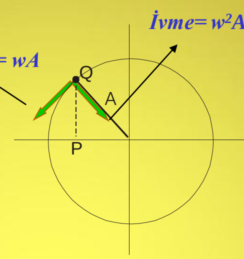


Basit harmonik hareketin açısal frekansı w, düzgün dairesel hareket yapan Q noktasının açısal hızı ile aynıdır. Basit harmonik hareketin frekansı ise Q noktasının daire üzerinde birim zamandaki çevrim sayısıdır. Dolayısı ile;

$$f = \omega / 2\pi$$
$$\omega = 2\pi f$$

Q’nun daire üzerinde tam bir devir yapması için geçen zaman basit harmonik hareketin periyodu T ile aynıdır.

$$T = 2\pi / \omega$$
$$\omega = 2\pi / T$$



Teğetsel hızın *x* bileşeni;

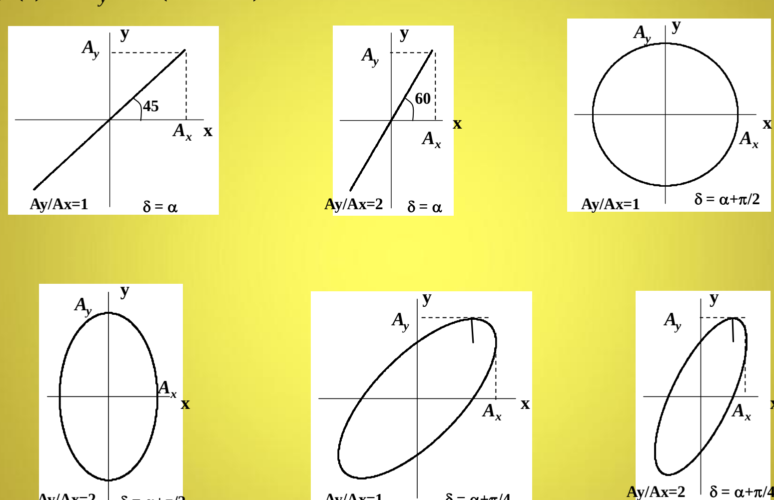
$$v_x(t) = -wA\sin(wt+\delta)$$

Düzgün dairesel hareketin ivmesinin *x* bileşeni;

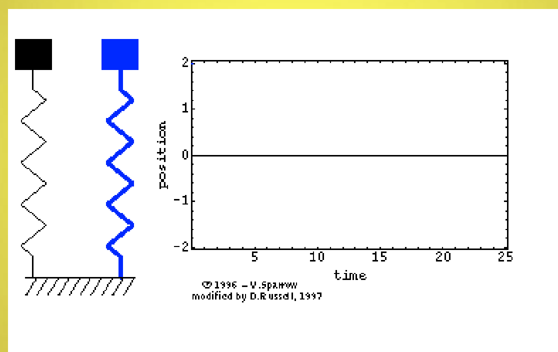
$$a_x(t) = -w^2 A\cos(wt+\delta)$$

$$x(t) = A_x\cos(wt+\delta)$$
$$y(t) = A_y\cos(wt+\alpha)$$

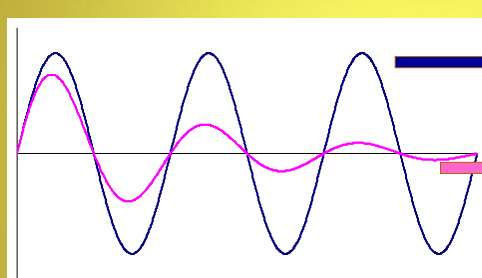
Harmonik hareketlerin birleşimleri



Sönümlü harmonik hareket



Sönümlü harmonik hareket



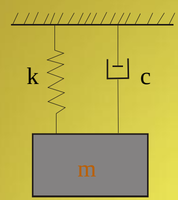
$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\underbrace{c\frac{dx}{dt}}+kx=0$$

Viskoz sönüm = cv

Sönüm sabiti (damping coefficient)

c : sönüm sabiti (Nt-sn/m, kg/sn)
m: kütle (kg)
k: yay sabiti (Nt/m)



$$\underbrace{m\ddot{x}}_{\textit{Yerçekimi kuvveti}} = \underbrace{-c\dot{x}}_{\textit{Sönüm kuvveti}} \underbrace{-kx}_{\textit{Yay kuvveti}}$$

$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0}$$

Sönümlü harmonik hareket denklemi

Tüm terimleri *m*'ye bölersek;

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\frac{c}{m} = 2\beta$$

Sönüm faktörü (damping factor)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Açısal frekans veya sistemin doğal frekansı

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

1 $$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

2. mertebeden adi diferansiyel denklem

Bu tip diferansiyel denklemlerin çözümü; $x = e^{rt}$ **yazılarak yapılabilir.**

$$r^2 + 2\beta r + \omega_0^2 = 0$$

Bu denklemin kökleri ; $r_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$

1 nolu denklemin çözümü, kök değerlerinin yerine konarak toplanmasıyla elde edilir;

$$x(t) = Be^{r_1 t} + Ce^{r_2 t}$$

$$x(t) = e^{-\beta t}[Be^{(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + Ce^{(-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}]$$

B ve C; hareketin başlangıç şartlarına bağlı sabitler

$$r_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

$$\beta^2 - \omega_0^2 = \left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}$$

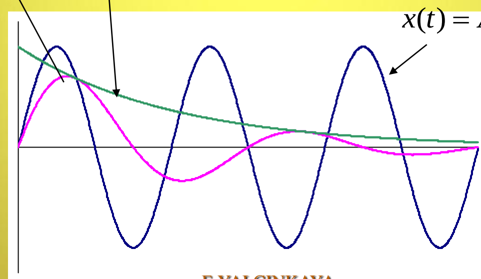
1. <u>Yetersiz sönüm hali:</u> $\beta^2 \langle \omega_0^2$

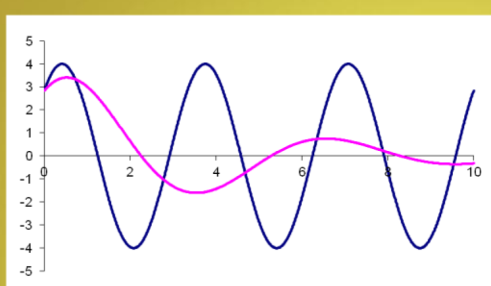
k, c'ye **göre oldukça büyüktür. Yani <u>yay, söndürücü mekanizmadan daha güçlüdür</u>.**

$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ ➡ $\omega_1^2 \rangle 0$

Çözüm : $x(t) = e^{-\beta t} A\cos(\omega_1 t + \delta)$

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \delta)$





$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

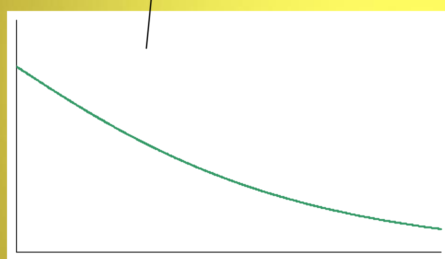
Sönümlü titreşimin frekansı

β=0 olduğu zaman denklem sönümsüz hareketi belirler.
β büyüdükçe sönümlü hareketin frekansı azalır.

2. <u>Kritik sönüm hali:</u> $\beta^2 = \omega_0^2$

Sönüm kuvveti yeterince büyük ise sistem artık titreşim hareketi yapmaz.

Çözüm : $x(t) = (B + Ct)e^{-\beta t}$



$$\beta^2 = \omega_0^2$$

$$\frac{c^2}{4m^2} = \frac{k}{m}$$

$$c^2 = 4km$$

$$c = 2\sqrt{km} = c_c$$

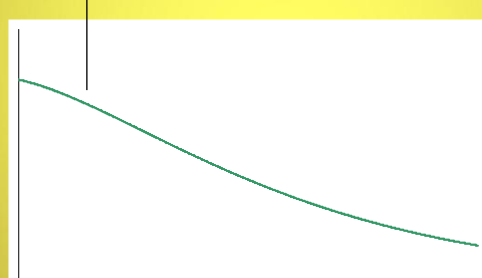
Kritik sönüm sabiti

3. <u>Aşırı sönüm hali:</u> $\beta^2 \rangle \omega_0^2$

c, k'ya **göre oldukça büyüktür. Yani <u>söndürücü mekanizma yaydan daha güçlüdür</u>.**

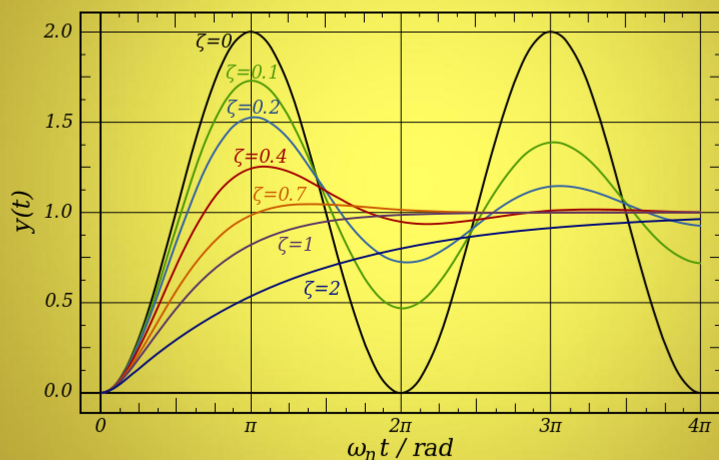
$$\omega_2^2 = \beta^2 - \omega_0^2$$

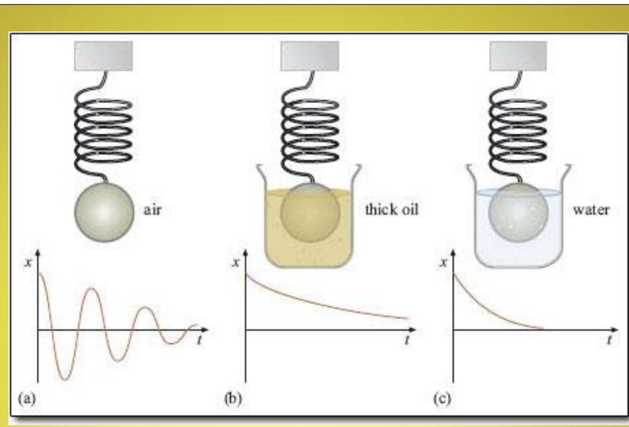
Çözüm : $x(t) = e^{-\beta t}[Be^{\omega_2 t} + Ce^{\omega_2 t}]$



$$\zeta = \frac{c}{c_c}$$

Sönüm oranı (damping ratio)

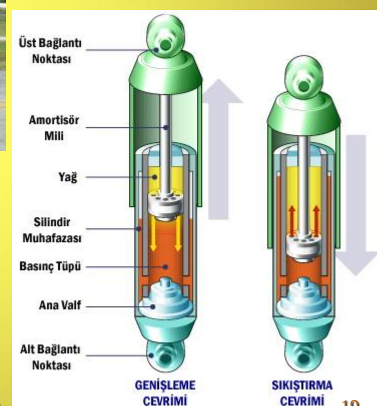




$\zeta < 1$ **Underdamped**

$\zeta > 1$ **Overdamped**

$\zeta = 1$ **Critically damped**



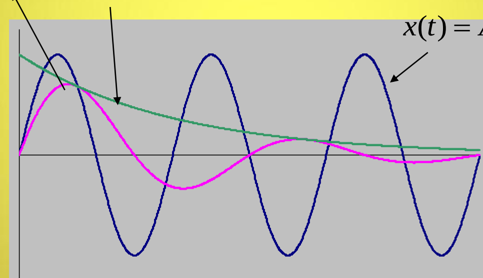
E.YALÇINKAYA 19

Sönüm (attenuation)

Titreşim sırasında sürtünme nedeniyle enerjinin bir kısmının ısıya dönüşür ve genlik azalımı (sönümlenme) meydana gelir.

$$x(t) = e^{-\beta t} A\cos(\omega_1 t + \delta)$$

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \delta)$$



E.YALÇINKAYA 20

$$x(t) = e^{-\beta t} A\cos(\omega_1 t + \delta)$$

$$\beta = \frac{\omega_0}{2Q}$$

Kalite faktörü
Quality factor

Q kalite faktörü, sönüm faktörü β ile ters orantılıdır. Daha az sönüm, daha büyük *Q* değerine karşılık gelir. Sönüm artarken *Q* azalır ve hareketin genliği daha hızlı azalır. Aynı zamanda sönümlü hareketin frekansı da (w_1), sönümsüz hareketin frekansından (w_0) farklılaşır. Sönümün hiç olmaması, *Q* değerinin sonsuz olması anlamına gelir.

Logaritmik azalım faktörü (Logarithmic decrement) : Serbest sönümlü titreşim genliğinin azalım oranını temsil eder.

$$\delta = \frac{Ae^{-\beta t}}{Ae^{-\beta(t+T_1)}} = e^{\beta T_1}$$

$$\delta = e^{\beta T_1} = e^{\frac{\beta 2\pi}{\omega_1}} = e^{\frac{\pi}{Q}}$$

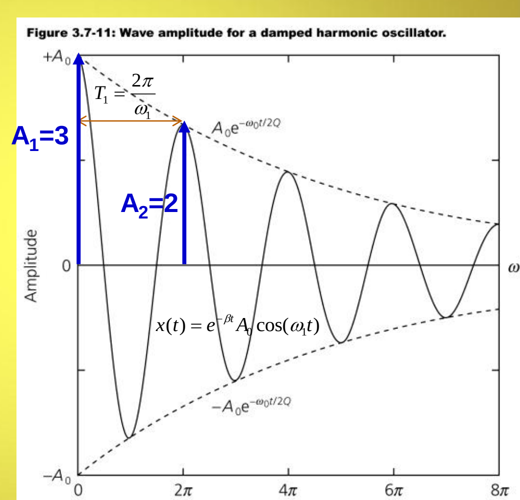
çok küçük β değerleri için; $\omega_0 \approx \omega_1$

$$\delta = e^{\frac{\pi}{Q}} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$\frac{\pi}{Q} = \ln(A_1 / A_2)$$

$$Q = \pi / \ln(3/2)$$

$$Q \approx 8$$



ÖDEV

1. Aşağıda verilen x(t) ve y(t) bağıntılarını tabloda 1. satır değerlerini kullanarak aynı grafik üzerinde çizdiriniz. Daha sonra x(t) değerlerini yatay eksende, y(t) değerlerini ise düşey eksende kullanarak yeni bir şekil çizdiriniz (düşey ve yatay eksen ölçeklerinin aynı olmasına dikkat ediniz). f = 0.3 Hz alınız ve zaman indeksini (t) 0'dan başlatarak 0.01 sn aralıklarla 10 sn'ye kadar arttırınız. Tablodaki her satır için işlemlerinizi tekrarlayınız.

$$x(t) = A_x \cos(wt + \delta)$$
$$y(t) = A_y \sin(wt + \alpha)$$

Ax (cm)	**Ay(cm)**	**δ (radyan)**	**α (radyan)**	
3	**3**	**0**	**0**	
3	**6**	**0**	**0**	
3	**3**	**0**	**π/2**	
3	**3**	**0**	**π/4**	
3	**6**	**0**	**π/4**	

2. Sönümsüz ($x_1(t)$) ve sönümlü ($x_2(t)$) harmonik hareket fonksiyonları aşağıdadır. Tabloda verilen değerleri kullanarak aynı grafik üzerinde hem sönümsüz hem sönümlü harmonik fonksiyonları birlikte çizdiriniz. Zaman indeksini (t) 0'dan başlatarak 0.01 sn aralıklarla 10 sn'ye kadar arttırınız.

$$x_1(t) = A\cos(\omega_0 t + \delta) \qquad \omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$$
$$x_2(t) = e^{-\beta t} A\cos(\omega_1 t + \delta)$$

A (cm)	**f0(cm)**	**δ (radyan)**	**β**
40	**0.3**	**-π/4**	**0.25**
40	**0.3**	**-π/4**	**0.70**

3. 4 kg ağırlığında bir kütle yay sabiti (k) 5000 N/m olan bir yayın ucuna asılmıştır. Sönüm oranı (ζ) 0.2 olan bir damper sisteme eklenmiştir. Kütle 50 mm aşağı çekilip bırakılmaktadır. Hareketin grafiğini t=0'dan başlatarak 0.001 sn aralıklarla 1 sn'ye kadar çizdiriniz. Grafik üzerinden logaritmik azalım faktörünü (δ) ve kalite faktörünü (Q) hesaplayınız.

Ödev teslim tarihi : 04 Mart 2016