ELASTİK DALGA YAYINIMI

Prof.Dr. Eşref YALÇINKAYA

(2016 - 4. ders)

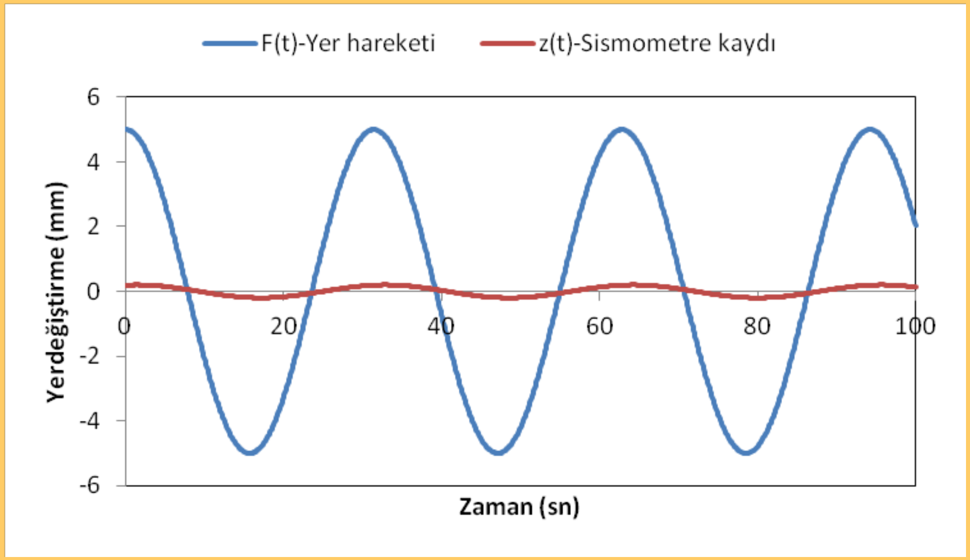
Geçtiğimiz ders;

- Zoruna titreşimler
- Rezonans
- Sismometre teorisi

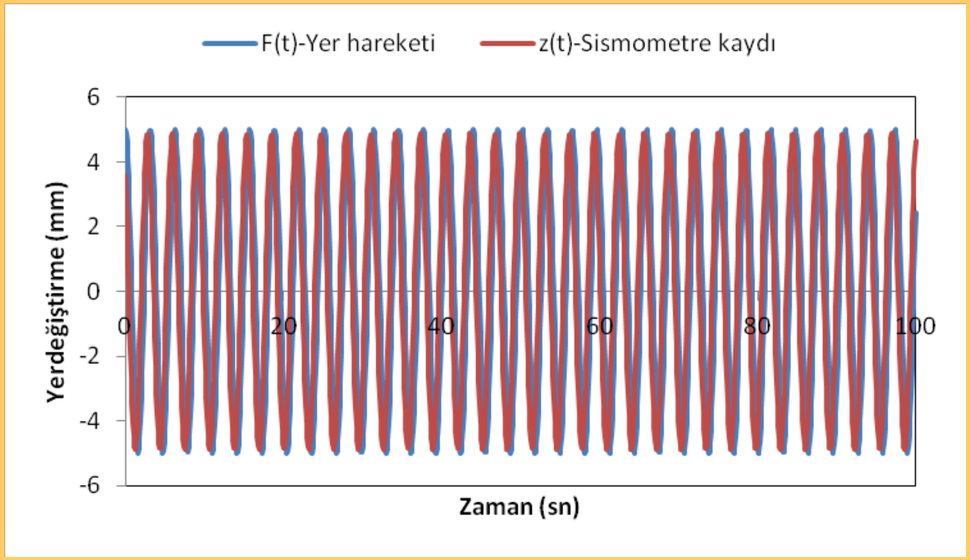
Bu derste;

- Dalga hareketi
- Yayılan dalgalar
- Tek boyutlu dalga denklemi

Geçen haftanın ödevi;



$$\omega_0 = 1$$
$$\omega = 0.2$$



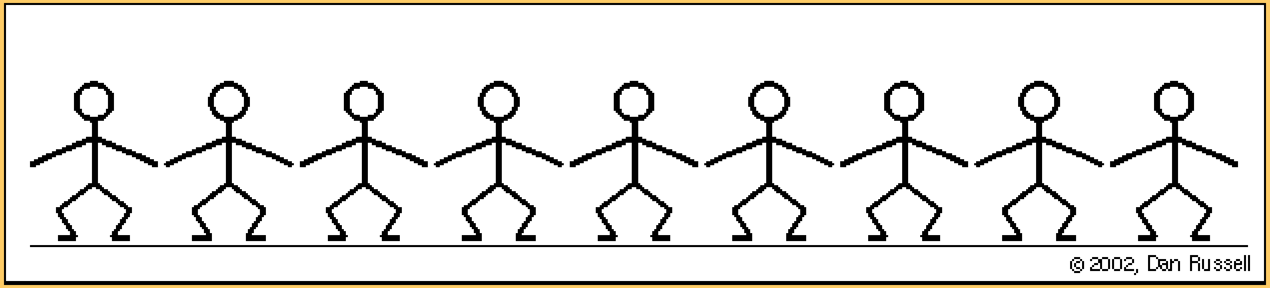
$$\omega_0 = 1$$
$$\omega = 2$$

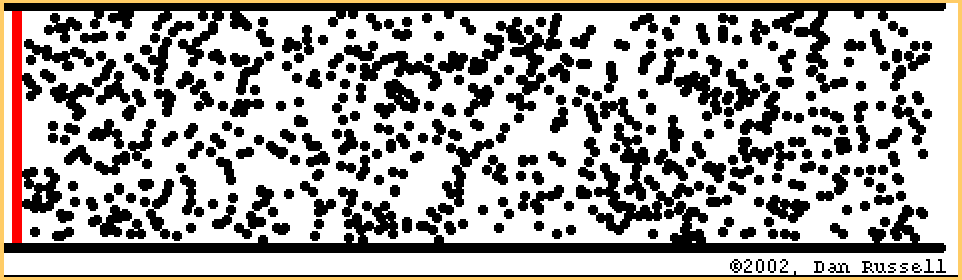
DALGA HAREKETİ

Dalga; ortam içinde yayılan bir bozuşma, bir değişimdir. Bozuşma veya değişim ortam içinde bir noktadan diğerine enerjiyi transfer eder. Bozuşma veya değişim; elastik deformasyon, basınç değişimi, elektriksel veya manyetik alan veya ısı şekillerini alabilir.

- **Deniz dalgaları**
- **Deprem dalgaları**
- **Ses dalgaları**
- **Işık dalgaları**
- **Radyo dalgaları**
- **Elektromanyetik dalgalar**

Mekanik veya elastik dalgalarda; dalganın içinde yayıldığı ortam, dalga geçerken bazı yerel titreşimlere uğrar. Fakat, ortam içindeki partiküller dalga ile birlikte seyahat etmezler veya kalıcı yer değiştirmeye uğramazlar.





Dalga türleri

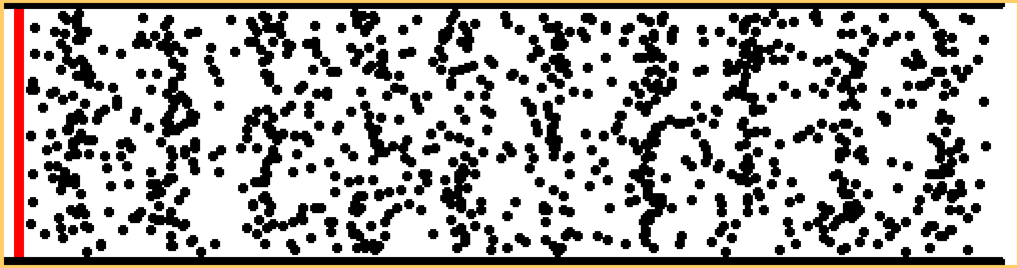
BOYUNA dalgalar (Longitudinal)

Tanecik hareketi dalganın yayılım doğrultusuna paralel

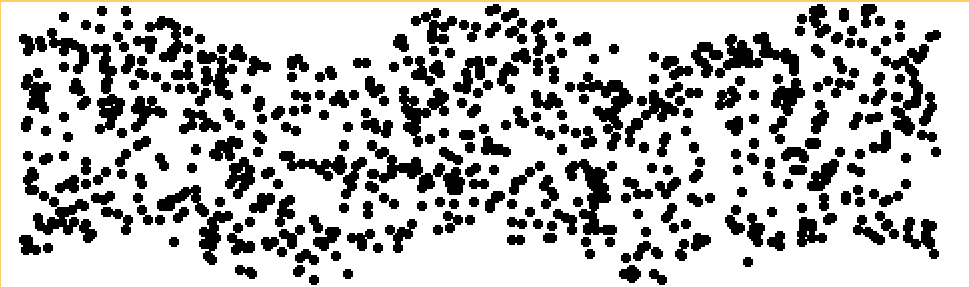
ENİNE dalgalar (Transverse)

Tanecik hareketi dalganın yayılım doğrultusuna dik

BOYUNA dalgalar
(Longitudinal)



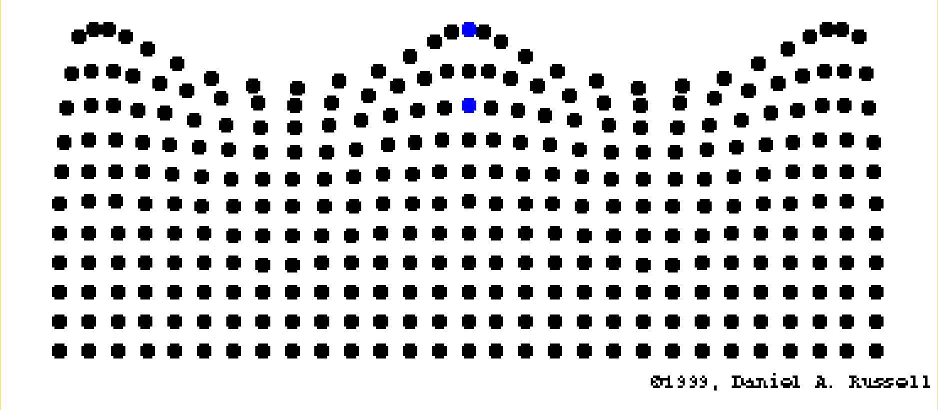
ENİNE dalgalar
(Transverse)



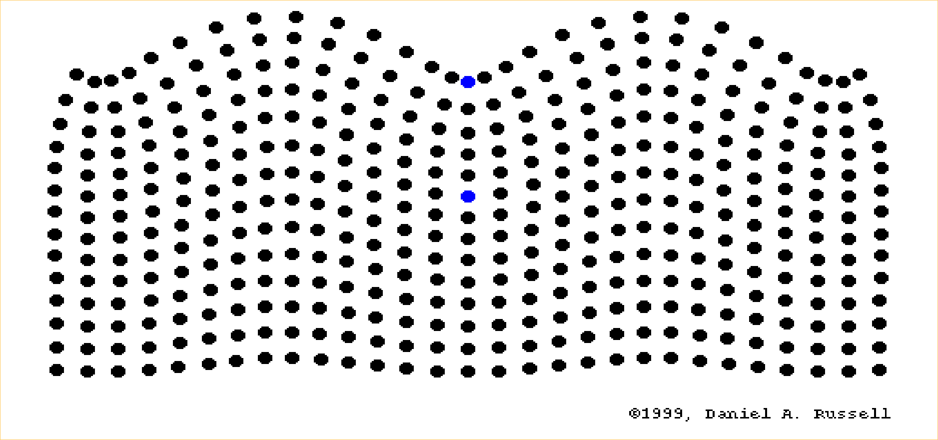
Yüzey dalgaları

Tanecik titreşim hareketi ne tam anlamı ile boyuna, ne de tam anlamı ile enine olan dalgalardır.

Water wave
(Su dalgası)

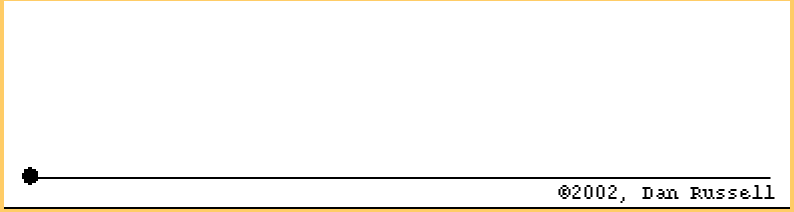


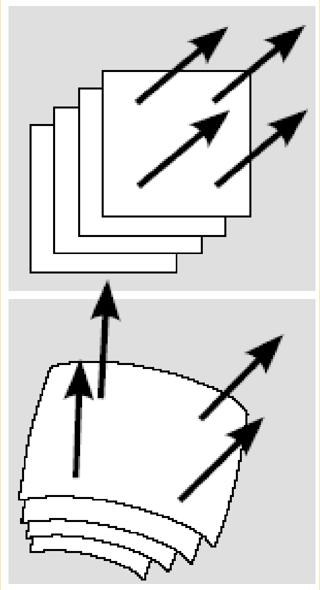
Rayleigh wave

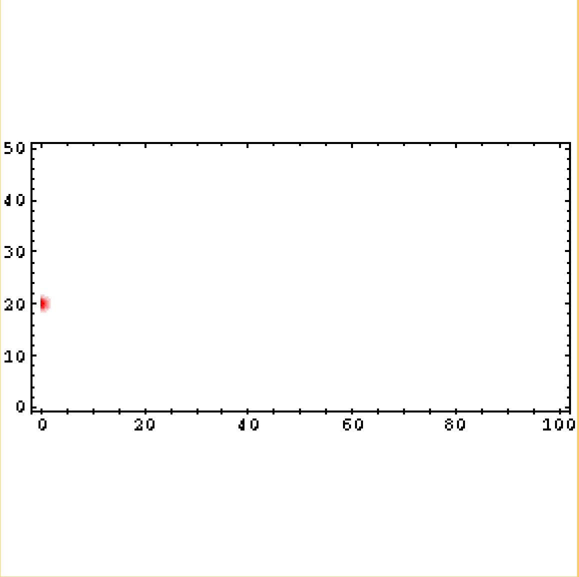


Dalgaları enerjinin yayıldığı boyutlara göre; tek boyutlu (bir ip boyunca yayılan dalgalar), iki boyutlu (deniz yüzeyindeki dalgalar) ve üç boyutlu dalgalar (ses, deprem, ışık dalgaları) diye sınıflandırabiliriz.

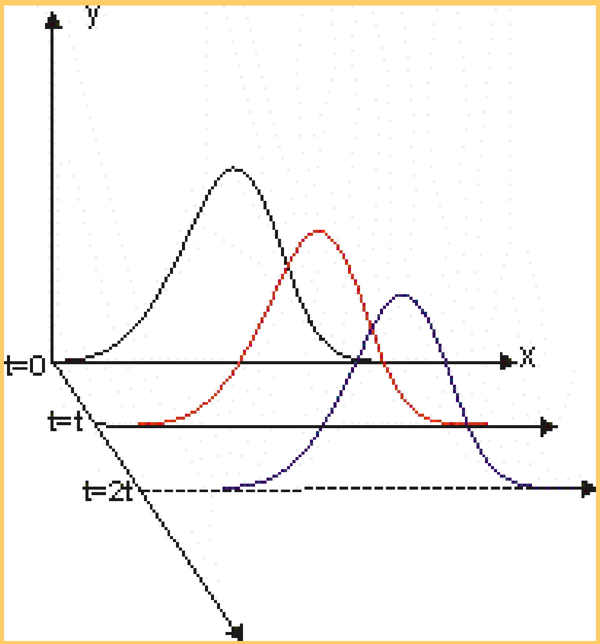
- Tek dalga veya puls
- Periyodik dalga
- Dalga cephesi
- Düzlem dalga
- Küresel dalga
- Silindirik dalga







Yayılan dalgalar



t = 0 **anında telin şekli;**

$$y = f(x)$$

Zaman ilerledikçe puls tel boyunca şekil değiştirmeden ilerler.

t = t **anında dalga** ***vt*** **kadar ilerlemiştir.**

Tek boyutlu dalga denklemi

x **yönünde uzanan, gerilmiş bir ip düşünün. Başlangıçta ip bir** τ **kuvveti altında gergin ve** ***u*** **denge durumundan** ***y*** **yönünde yerdeğiştirme her yerde sıfırdır. İp bir puls hareketi ile uyarıldıktan sonra ipin bazı kısımları denge durumundan yerdeğiştirir ve bu puls ip boyunca hareket eder.**

Amacımız; ***u(x,t)*** **yerdeğiştirmesini hem ip üzerindeki** <u>**pozisyonuna,**</u> **hem de** <u>**zamana**</u> **göre tanımlamak :**

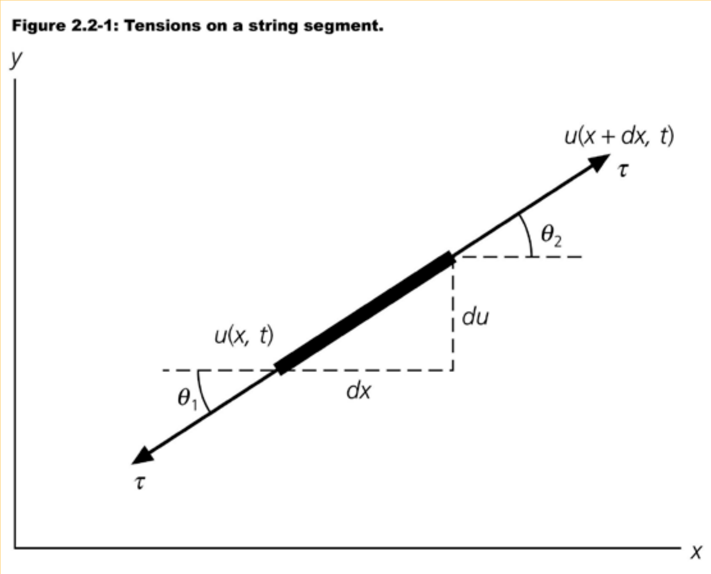
$$F = ma$$

$$F = ma$$

$$\tau \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx = \rho dx \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}}$$

$$v = (\tau / \rho)^{1/2}$$



$$-\tau \sin\theta_1 = -\tau \tan\theta_1 = -\tau\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$-\tau \sin\theta_2 = -\tau \tan\theta_2 = -\tau\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx\right)$$

$$\sum F_y = \tau\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right)dx$$

Bu denklem, yay boyunca *u(x,t)* yerdeğiştirmesinin uzay ve zaman türevleri arasındaki ilişkiyi tanımlar. İki kısmi türev arasındaki ilişki, yay boyunca *v* hızıyla yayılan bir dalgayı tanımlar.

Dalga denkleminin çözümü;

$$u(x,t) = f(x \pm vt)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

$$f(x - vt) = \frac{1}{\cancel{v^2}}\cancel{v^2} f(x - vt)$$

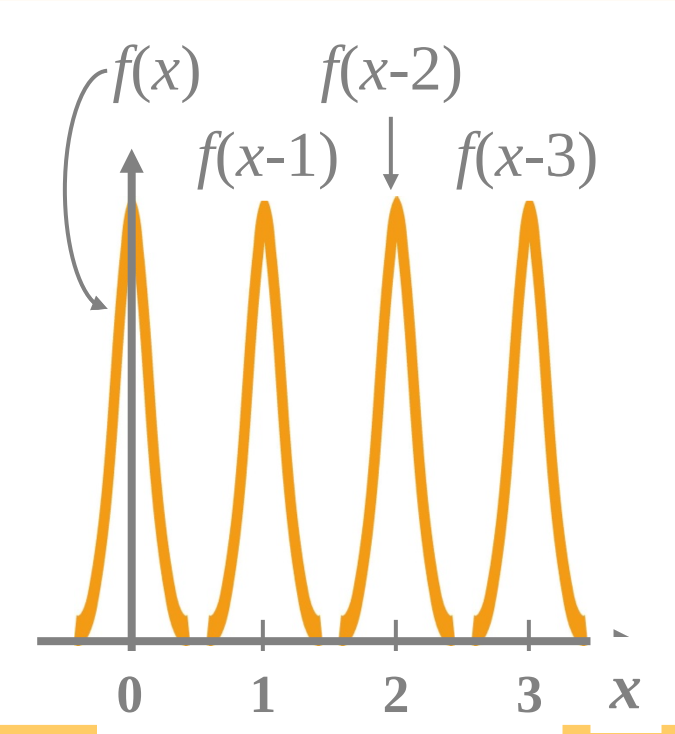
$$u(x,t) = f(x \pm vt)$$

$$u(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

Bu çözüm pozitif *x* yönünde ve negatif *x* yönünde dalga şekli değişmeden *v* hızıyla yayılan dalgayı temsil eder.

$$u(x,t) = f(x - vt)$$

Dalga şeklinin aynı kalması için, yani *f* fonksiyonunun şeklinin değişmemesi için *t* arttıkça *x*'in artması gerekir. Bu da pozitif yönde ilerleyen bir dalgaya karşılık gelir.



Harmonik yayılan dalga denklemi çözümü;

$$u(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

$$-k^2 A\cos(kx - \omega t) = -\frac{1}{v^2}\omega^2 A\cos(kx - \omega t)$$

$$k = \frac{\omega}{v}$$

$$u(x,t) = A\cos k(x - vt)$$

$$y(x,t) = f(x - vt)$$

Yayılan dalga formuna uygun bir fonksiyon tanımlarsak;

$$y(x,t) = y_m \, \mathrm{Sin}\, k(x - vt)$$

Bu denklemde *t* ’yi sabit tutarak fonksiyonun *x* ’e göre değişimini veya *x* ’i sabit tutarak fonksiyonun zamanla değişimini gözlemleyebiliriz.

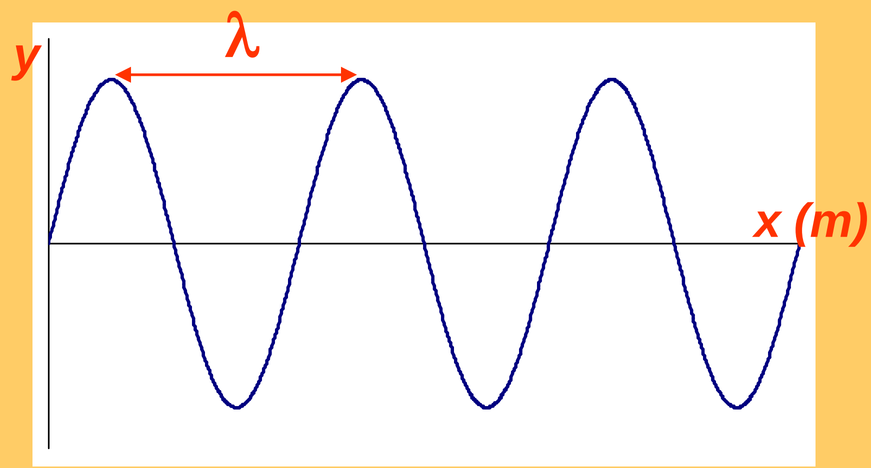
$t = 0$ anında fonksiyonun şekli;

$$y(x,0) = y_m \, \mathrm{Sin}\, kx$$

$$y(x,0) = y_m \sin kx$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$y(x,0) = y_m \sin 2\pi \frac{x}{\lambda}$$



y **fonksiyonunun değeri** ***x=λ, x=2λ , x=3λ +…….*** **mesafelerinde aynıdır. Fonksiyon λ uzaklıklarıyla kendini tekrarlar. Bu nedenle λ "dalga boyu" olarak adlandırılır.**

Yayılan dalganın bir dalga boyu (λ) mesafesini alması için geçen zamana (T-dalganın periyodu) dersek dalganın hızı;

$$v = \frac{\lambda}{T} \qquad \lambda = vT$$

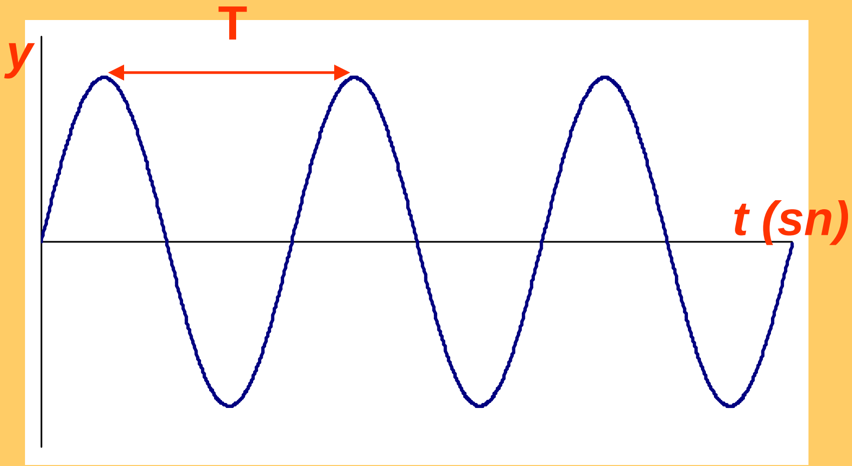
$$y\,(x,t) = y_m \,\mathrm{Sin}\, k\,(\,x - v\,t\,)$$

x = 0 anında fonksiyonun şekli;

$$y(0,t) = y_m \sin k(-vt)$$

$$y(0,t) = y_m \sin \frac{2\pi}{\lambda} vt$$

$$y(0,t) = y_m \sin 2\pi \frac{t}{T}$$



y **fonksiyonunun değeri** ***t=T, t=2T , t=3T …….*** **zamanlarında aynıdır. Fonksiyon T zaman aralıklarıyla kendini tekrarlar. Bu nedenle T "dalga periyodu" olarak adlandırılır.**

$$y(x,t) = y_m Sin\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)$$

v : faz hızı
λ : dalga boyu

$$\boxed{\lambda = vT}$$

$$y(x,t) = y_m Sin2\pi(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T})$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

dalga sayısı

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

açısal frekans

$$y(x,t) = y_m Sin(kx - \omega t + \phi)$$

pozitif x yönünde yayılan dalga

Faz sabiti

$$u(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$$

Bu dalganın fazı ;

$$\varphi = \omega t - kx$$

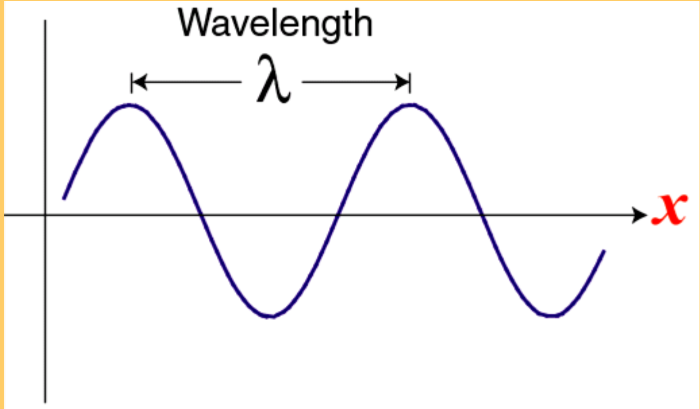
Faz zamanla değişmiyorsa, dalganın şekli değişmez.
Faz sabit ise;

$$d\varphi = 0$$

$$wdt = kdx$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{w}{k} \Rightarrow$$ **Faz hızı**

$$u(x,t) = A\cos(\omega t \pm kx)$$

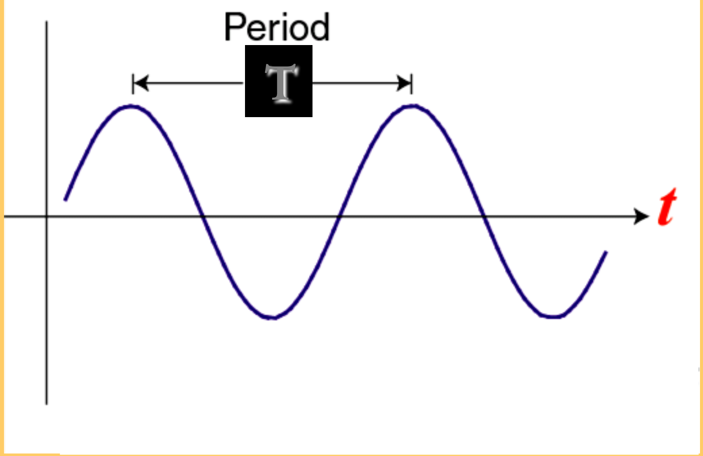


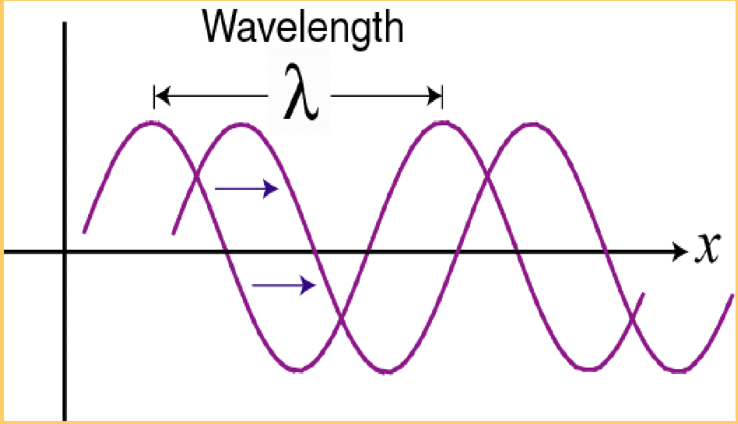
$$\lambda = vT$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$v = \omega / k$$





Değişken	Birim	
Hız	uzunluk/zaman	$v = \omega/k = f\lambda = \lambda/T$
Periyod	zaman	$T = 2\pi/\omega = 1/f = \lambda/v$
Açısal frekans	radyan/zaman	$\omega = 2\pi f = 2\pi/T = kv$
Frekans	1/zaman	$f = \omega/2\pi = 1/T = v/\lambda$
Dalga boyu	uzunluk	$\lambda = 2\pi/k = v/f = vT$
Dalga sayısı	1/uzunluk	$k = 2\pi/\lambda = \omega/v = 2\pi f/v$

DALGA HIZI

$$v = \frac{x}{t} = \frac{\lambda}{T} = \frac{w}{k}$$

- Bir ortam içinde yayılan dalganın hızını hangi değişkenler etkiler?
- Dalga frekansı veya dalga boyu dalganın hızını etkiler mi?
- Dalganın genliği hızını etkiler mi?
- Veya diğer değişkenler, örneğin ortamın yoğunluğu, elastik özellikleri dalga yayılım hızını etkileyebilir mi?

Deney	Gerilme (N)	Frekans (Hz)	Dalgaboyu (m)	Hız (m/s)
1	2.0	4.05	4.00	16.2
2	2.0	8.03	2.00	16.1
3	2.0	12.30	1.33	16.4
4	2.0	16.25	1.00	16.3
5	2.0	20.25	0.800	16.2
6	5.0	12.8	2.00	25.6
7	5.0	19.3	1.33	25.7
8	5.0	25.45	1.33	25.5

Dalga; ortam içinde yayılan bir bozuşma, bir değişimdir.

“A wave is a disturbance moving through a medium."

Dalga

- Enine, boyuna

Özellikleri

- Genlik, dalga boyu, frekans vb.

Ortam

- Hava, su, kireçtaşı vb.

Özellikleri

- Yoğunluk, ısı, elastisite vb.

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$$

Dalga tarafından taşınan enerji;

$$E = KE + PE$$

$$E = \int_0^{\lambda} \frac{1}{2} m v^2 dx + \int_0^{\lambda} \frac{1}{2} k x^2 dx$$

$$E = \int_0^{\lambda} \frac{1}{2} m(-\omega A \sin(\omega t - kx)^2 dx + \int_0^{\lambda} \frac{1}{2} k(A\cos(\omega t - kx)^2 dx$$

$$E = \frac{A^2 \omega^2 \rho}{4} + \frac{A^2 \omega^2 \rho}{4}$$

$$E = A^2 \omega^2 \rho / 2$$

Enerji akısı: **birim zamanda birim alandan geçen enerji**

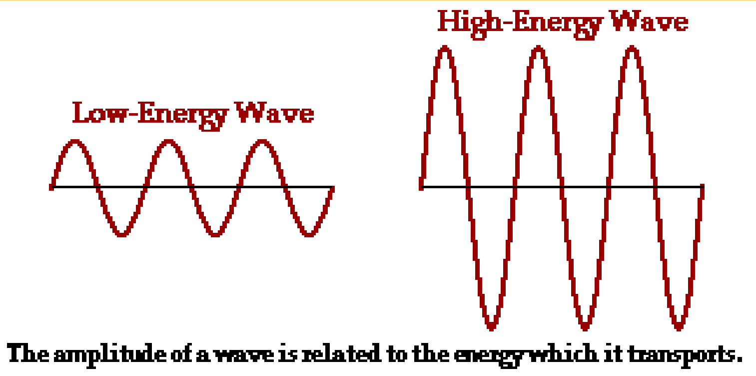
hız

$$I = A^2 \omega^2 \rho v / 2$$

genlik

açısal frekans

Enerji, dalga genliği ve frekansının karesi ile doğru orantılıdır. Aynı genliğe sahip yüksek frekanslı dalgalar daha büyük enerjiye sahiptirler.



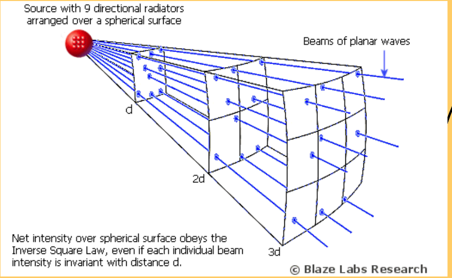
$$E \propto A^2$$

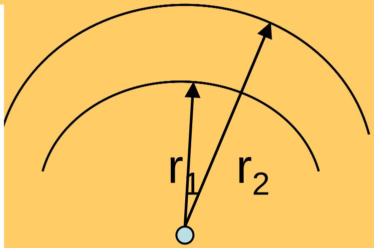
Genlik(A)	Enerji(E)
1 birim	1 birim
2 birim	4 birim
3 birim	9 birim

Genlik ve enerjinin uzaklığa bağlı değişimi: Geometrik yayılma (geometric spreading)

Küresel yayılan dalgalarda; küre cepheleri kaynak uzaklığının karesine bağlı olarak (*$4\pi r^2$*) genişler. Enerjinin korunması ilkesine göre küre cephelerinin taşıdığı enerji birbirine eşittir:

$$E_1 = E_2$$





Küre cephelerinde birim alana düşen enerji akışı uzaklığın karesiyle azalır:

$$I_1 S_1 = I_2 S_2$$

$$I_1 4\pi r_1^2 = I_2 4\pi r_2^2$$

$$I_2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 I_1$$

$$I_2 = \frac{1}{r_2^2} I_1$$

Dalga genlikleri ise uzaklıkla ters orantılı olarak azalır:

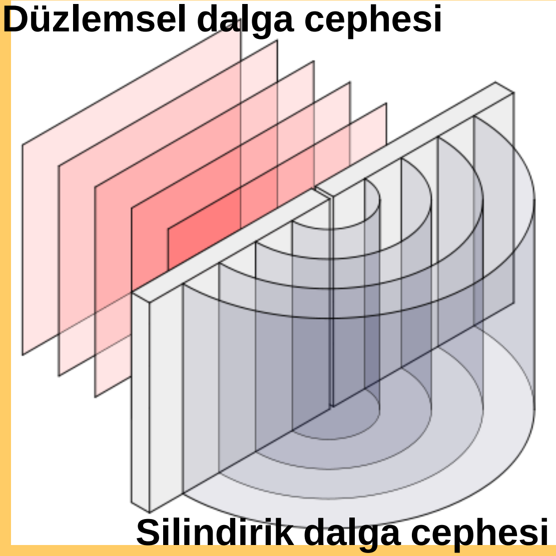
$$\frac{1}{2}\rho v \omega^2 A_1^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \frac{1}{2}\rho v \omega^2 A_2^2$$

$$A_2 = \frac{1}{r_2} A_1 \qquad G(r) = \frac{1}{r}$$

geometric spreading

Silindirik yayılan dalgalarda; silindir cepheleri kaynak uzaklığına bağlı olarak ($2\pi r$) genişler:

$$I_2 = \frac{1}{r} I_1 \qquad A_2 = \frac{1}{\sqrt{r}} A_1 \qquad G(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}$$



Düzlemsel yayılan dalgalarda; dalga cephesi değişikliğe uğramadan yayılır:

$$I_2 = I_1 \qquad A_2 = A_1$$

Yayılan dalgalarda dalga genliklerinin azalımı (attenuation-sönüm yada soğurulma) iki şekilde gerçekleşir;

1. **Uzaklığa bağlı genliklerin azalımı (geometric spreading)-G(r)**
2. **Dalga geçişi sırasında tanecikler arasındaki sürtünme nedeniyle enerjinin bir kısmının ısıya dönüşmesi (anelastic attenuation-intristic attenuation)-S(r)**

$$A(r) = G(r) \times S(r)$$

$$A(r) = \frac{1}{r} \times e^{-\frac{\omega t}{2Q}}$$

$$A(r) = \frac{1}{r} \times e^{-\frac{\omega r}{2Qv}}$$

Kaynaktan *r* kadar uzaklıkta sönümlü-küresel yayılan harmonik dalga denklemi;

$$\phi(r,t) = \frac{1}{r} e^{-\frac{\omega r}{2Qv}} A\cos(kr - \omega t)$$

ÖDEV:

1. Yayılan bir periyodik dalganın denklemi aşağıda verilmiştir. y_m = 5 cm, λ = 200 m ve T = 2 sn alarak $y(x,t)$ fonksiyonunu x = 0 m ve x = 25 m sabit değerleri için aynı grafik üzerinde çizdiririniz. Zaman sayacını (t) 0'dan 10 sn'ye kadar 0.01 sn aralıklarla arttırınız.

$$y\,(x,t) = y_m \,\mathrm{Sin}\, k\,(\,x - v\,t\,)$$

$$\lambda = vT$$

2. Aynı denklemde bu kez x değerlerini 0'dan 1 m aralıklarla 1000 m'ye kadar arttırarak $y(x,t)$ fonksiyonunu t = 0 ve t = 0.3 sn sabit değerleri için aynı grafik üzerinde çizdiririniz.

Teslim tarihi : 18 Mart 2016