ELASTİK DALGA YAYINIMI

(8. ders - 2016)

Prof.Dr. Eşref YALÇINKAYA

Geçtiğimiz ders;

- Elastisite teorisi
- Gerilme ve bileşenleri
- Deformasyon ve bileşenleri

Bu derste;

- Gerilme-deformasyon bağıntıları
- Elastik sabitler
- Hareket denklemeleri ve çözümleri

Gerilme – Deformasyon Bağıntıları

Elastik cisimlerde gerilme ile deformasyon arasındaki ilişki Hook Kanunu ile tanımlanır. Hook kanununa göre deformasyon uygulanan gerilme ile doğru orantılıdır (linear – doğrusal elastisite). Yerküre doğrusal elastisite özelliği gösterdiğinde sismik dalgaların oluşumunu doğurur. Doğrusal elastisite, sismik dalgaların yayılımını kapsayan kısa zaman ölçekleri için geçerlidir. Uzun zaman ölçeklerinde (binlerce yıl) yerküre, bir viskoz sıvı gibi akar. Sismik dalgalar için doğrusal elastisite durumu aynı zamanda çok küçük yerdeğiştirmeler için geçerlidir. Örneğin, bir sismik dalga 10 mikron civarında yerdeğiştirmeler oluşturabilir, bu durum yaklaşık 10^{-9} deformasyona karşılık gelir. 10^{-4}'ten daha büyük deformasyon değerleri için stress-strain arasındaki doğrusal ilişki kırılır.

Hooke Kanunu

$$\sigma_{ij} = E\varepsilon_{ij}, \qquad i, j = x, y, z$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

Buna göre, elastik cismin içinde herhangi bir noktada gerilmenin bağımsız altı bileşeninden herbiri streynin altı bileşeninin bir fonksiyonudur.

$$\sigma_{xx} = c_{11}\varepsilon_{xx} + c_{12}\varepsilon_{yy} + c_{13}\varepsilon_{zz} + c_{14}\varepsilon_{yz} + c_{15}\varepsilon_{zx} + c_{16}\varepsilon_{xy}$$

$$\sigma_{yy} = c_{21}\varepsilon_{xx} + c_{22}\varepsilon_{yy} + c_{23}\varepsilon_{zz} + c_{24}\varepsilon_{yz} + c_{25}\varepsilon_{zx} + c_{26}\varepsilon_{xy}$$

$$\sigma_{zz} = c_{31}\varepsilon_{xx} + c_{32}\varepsilon_{yy} + c_{33}\varepsilon_{zz} + c_{34}\varepsilon_{yz} + c_{35}\varepsilon_{zx} + c_{36}\varepsilon_{xy}$$

$$\sigma_{yz} = c_{41}\varepsilon_{xx} + c_{42}\varepsilon_{yy} + c_{43}\varepsilon_{zz} + c_{44}\varepsilon_{yz} + c_{45}\varepsilon_{zx} + c_{46}\varepsilon_{xy}$$

$$\sigma_{zx} = c_{51}\varepsilon_{xx} + c_{52}\varepsilon_{yy} + c_{53}\varepsilon_{zz} + c_{54}\varepsilon_{yz} + c_{55}\varepsilon_{zx} + c_{56}\varepsilon_{xy}$$

$$\sigma_{xy} = c_{61}\varepsilon_{xx} + c_{62}\varepsilon_{yy} + c_{63}\varepsilon_{zz} + c_{64}\varepsilon_{yz} + c_{65}\varepsilon_{zx} + c_{66}\varepsilon_{xy}$$

C_{mn} katsayılarına malzemenin elastik sabitleri denir. İzotrop, yani elastik davranışı istikamete bağlı olmayan bir elastik cisim için bağımsız elastik sabitlerin sayısı 36'dan 2'ye iner ; λ, μ . Lame sabitleri olarak adlandırılan bu iki bağımsız elastik sabit kullanılarak gerilme-deformasyon ilişkileri tekrar yazılırsa;

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{yy} + \lambda\varepsilon_{zz} = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{xx}$$

$$\sigma_{yy} = \lambda\varepsilon_{xx} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{yy} + \lambda\varepsilon_{zz} = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{yy}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{yy} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz} = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{zz}$$

$$\sigma_{yz} = \mu\varepsilon_{yz}$$

$$\sigma_{zx} = \mu\varepsilon_{zx}$$

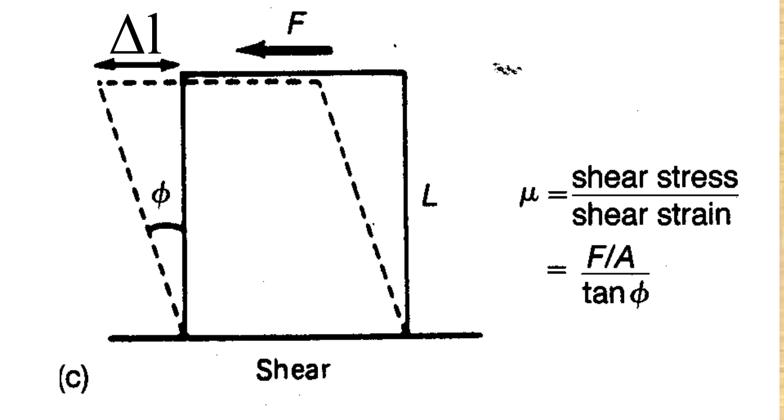
$$\sigma_{xy} = \mu\varepsilon_{xy}$$

Yukarıda verilen ilişkiler biraz sonra sismik dalgaları tanımlarken kullanılacaktır. Aynı zamanda, sismik dalga hızlarının elastik sabitlere bağlı olduğunu göreceğiz. İzotrop bir ortam içinde sismik dalga hızları yayıldıkları yöne bağımlı değildir.

Elastik Sabitler

μ ; "*rijidite (katılık)*" veya "*kayma modülü*"; elastik izotrop bir cismin kayma gerilmesine (ör. σ_{xy}) karşı direnci olarak tanımlanabilir.

$$\mu = \frac{\sigma_{xy}}{\varepsilon_{xy}} = \frac{F/A}{\Delta l / L}$$

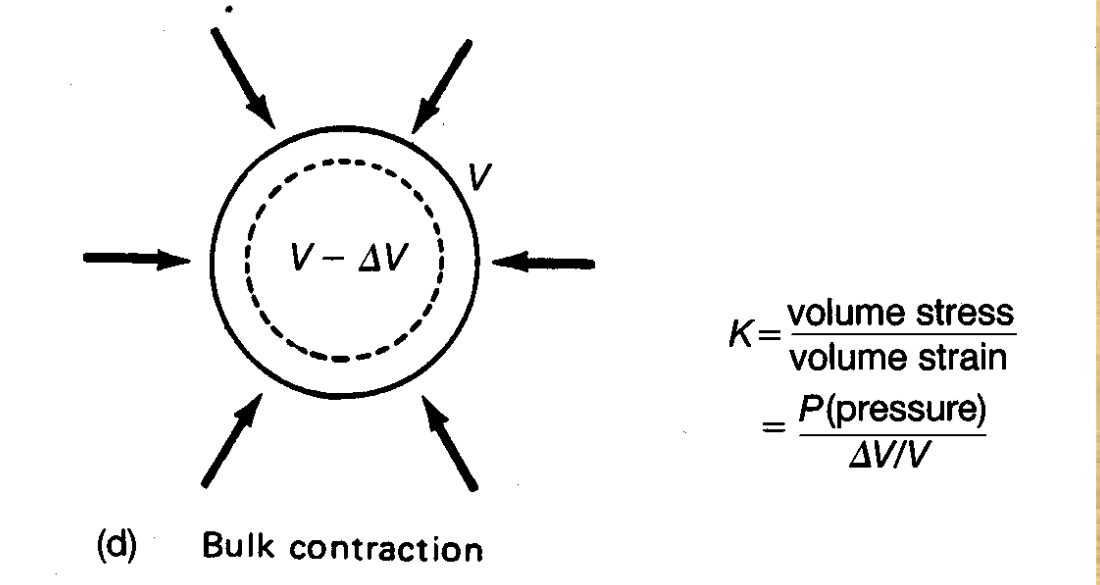


Yüksek μ değerine sahip bir cisim uygulanan kayma gerilmesine çok küçük bir kayma deformasyonu ile karşılık verir. Sıfır rijidite değeri kayma gerilmelerinin oluşmadığı sıvı ortamlara karşılık gelir.

Yerkabuğu için rijidite değeri yaklaşık ; 30 GPa dir. Çelik için; 80 GPa, Lastik için; 0.0006 GPa'dır.

Diğer bir elastik sabit "**sıkışmazlık**" veya "**bulk modülü - k**" dür.

$$k = \frac{P}{\Delta V / V} = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

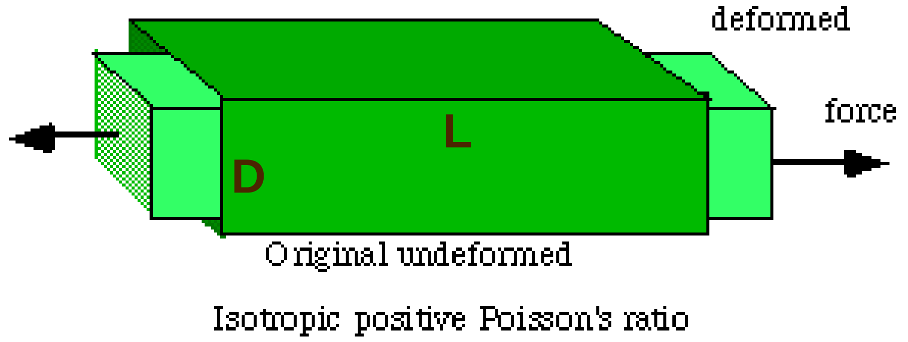


Bir cismin hacim değişikliğine karşı direnci olarak tanımlanabilir. Uygulanan bir basınç altında büyük k değeri daha küçük bir hacim değişikliğine işaret eder. **Sıvı içinde** $k = \lambda$ **dir.**

Çelik için bulk modülü; 160 GPa, cam için; 40 GPa, su için; 2.2 GPa, hava için; 0.0001 GPa'dır.

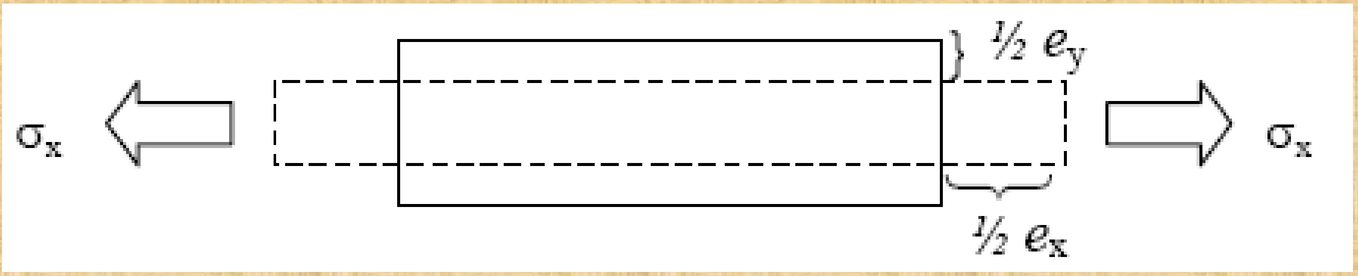
"Poisson oranı – v " bir cisim üzerinde enine daralmanın boyuna uzamaya oranı olarak tanımlanır.

$$v = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} = -\frac{\Delta d / D}{\Delta l / L} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$



Poisson oranı 0 – 0.5 arasında değişir ve sıvılar için 0.5'tir. Çelik için; 0.30, altın için; 0.42, cam için; 0.22, mantar için ~0.0'dır.

“**Young modülü - *E*** ” bir cisim üzerinde boyuna gerilmenin boyuna deformasyona oranı olarak tanımlanır.



$$E = -\frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}} = \frac{F/A}{\Delta l/L} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

Kabuk için **Young modülü** 75 GPa iken, lastik için 0.5 GPa, çelik için; 200 GPa, cam için 70 GPa’dır.

Elastik sabitler *E*, *υ* ve *k* basit deneylerle kolayca ölçülebilmeleri nedeniyle mühendislikte sık kullanılan sabitlerdir. Sismik dalga yayılımı için ise λ ve μ, bazen de *k* daha yaygındır.

Çoğu sismolojik problem $\lambda = \mu$ kabul edilerek basitleştirilir. Böyle bir cisim *Poisson katısı* olarak bilinir ve yerküre için uygun bir yaklaşımdır. Bu durumda Poisson oranı *0.25* değerine, Young modülü $E = (5/2)\,\mu$, bulk modülü $k = (5/3)\,\mu$ 'e eşit olur.

Kayaçlar için; *E*, *k*, λ *ve* μ değerleri genellikle 20-120 GPa arasındadır.

1 Pa = 1 N/m^2
1 GPa = 10^9 Pa
1 bar = 10^6 dyne/cm^2
1 Gpa =10^4 bar = 10 kbar

Relations between moduli

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \frac{\lambda}{(3K - \lambda)} = \frac{E}{2\mu} - 1 = \frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)} = \frac{3K - E}{6K}$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{\nu} = \frac{9K(K - \lambda)}{3K - \lambda} = 2\mu(1 + \nu) = \frac{9K\mu}{3K + \mu} = 3K(1 - 2\nu)$$

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{\lambda(1 + \nu)}{3\nu} = \frac{2\mu(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)} = \frac{\mu E}{3(3\mu - E)} = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

$$\lambda = \frac{2\mu\nu}{1 - 2\nu} = \frac{\mu(E - 2\mu)}{3\mu - E} = K - \frac{2}{3}\mu = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = \frac{3K\nu}{1 + \nu} = \frac{3K(3K - E)}{9K - E}$$

$$\mu = \frac{\lambda(1 - 2\nu)}{2\nu} = \frac{3}{2}(K - \lambda) = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \frac{3K(1 - 2\nu)}{2(1 + \nu)} = \frac{3KE}{9K - E}$$

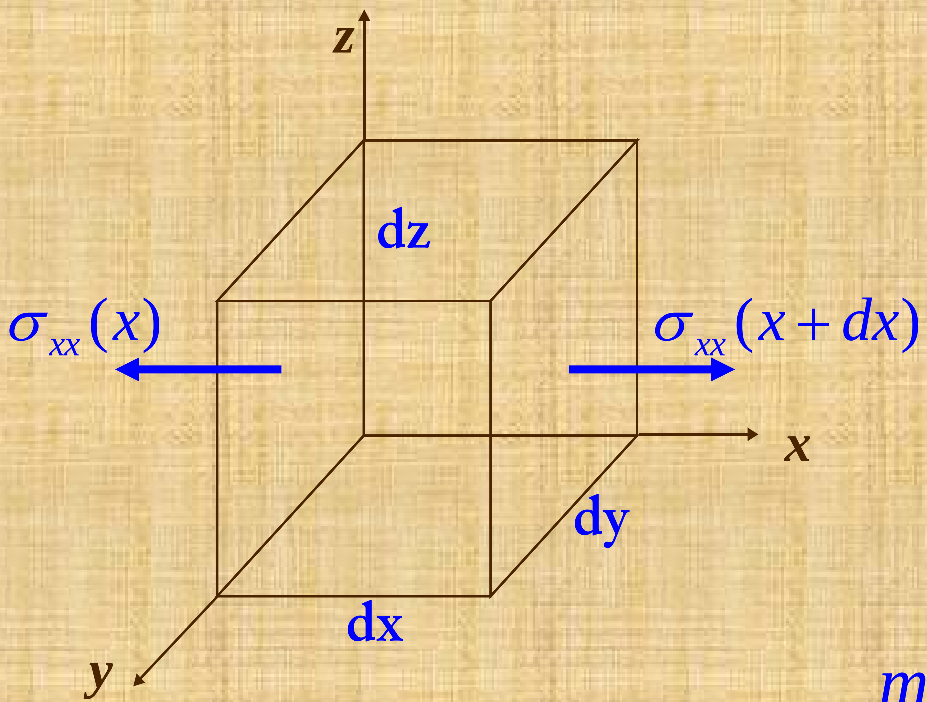
3 Boyutlu Dalga Denklemleri
Hareket Denklemleri

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

$$v = (\tau / \rho)^{1/2}$$

$$u(x,t) = f(x \pm vt)$$

Bir Boyutlu Dalga denklemi ve çözümü



Hacim elemanı üzerinde net kuvvet:

$$F_x = \sigma A$$

$$F_x = \left[\sigma_{xx}(x+dx) - \sigma_{xx}(x)\right] dydz$$

$$m\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \left[\sigma_{xx}(x+dx) - \sigma_{xx}(x)\right] dydz$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} dxdydz = \left[\sigma_{xx}(x+dx) - \sigma_{xx}(x)\right] dydz$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} dxdydz = \left[\sigma_{xx}(dx)\right] dydz$$

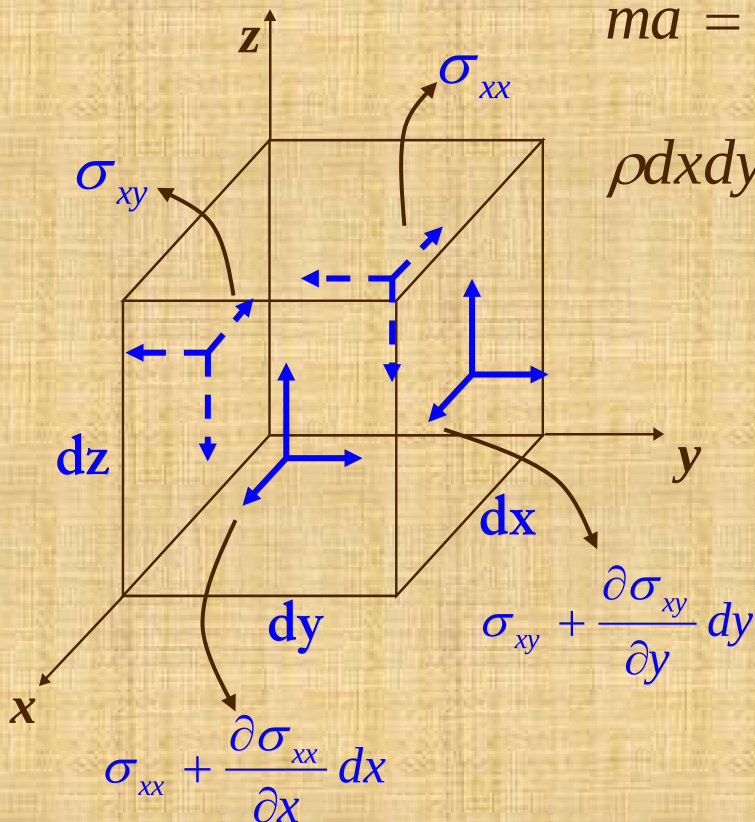
$$\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \qquad \sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{xx} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \\ &v = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \\ &u(x,t) = f(x \pm vt) \end{aligned}\right\}$$

Bir Boyutlu Dalga denklemi ve çözümü



$$ma = F$$

$$\rho dxdydz \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx)dydz - \sigma_{xx} dydz$$

$$+ (\sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dy)dxdz - \sigma_{xy} dxdz$$

$$+ (\sigma_{xz} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz)dxdy - \sigma_{xz} dxdy$$

Üç Boyutlu Dalga denklemleri

$$\left\{ \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{aligned} \right.$$

Bu denklemeler gerilme-deformasyon ve deformasyon-yerdeğiştirme ilişkileri kullanılarak yerdeğiştirmelere göre yazılabilir :

$$\left.\begin{aligned}
\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (\lambda+\mu)\frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu\nabla^2 u \\
\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= (\lambda+\mu)\frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu\nabla^2 v \\
\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= (\lambda+\mu)\frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu\nabla^2 w
\end{aligned}\right\}$$

Üç Boyutlu Dalga denklemleri (yerdeğiştirmelere göre)

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Laplace operatörü

$$\Delta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Dilatasyon

Bu denklemeler, izotrop, tam elastik bir katı içinde üç boyutlu hareket denklemlerini temsil ederler. Bu denklemeler ortam içerisinde iki tür dalga yayılımını belirlerler. Bunlar gerekli işlemlerden sonra ;

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \nabla^2 \Delta$$

Bu denklem Δ dilatasyonunun $(\lambda+2\mu/\rho)^{1/2}$ hızı ile ortam içerisinde yayıldığını gösterir ki bu **P dalgası** yayılma hızıdır. Δ; kayma ve rotasyonun (dönme) olmadığı hacimsel bir deformasyonu tanımlar.

$$\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \theta_x$$

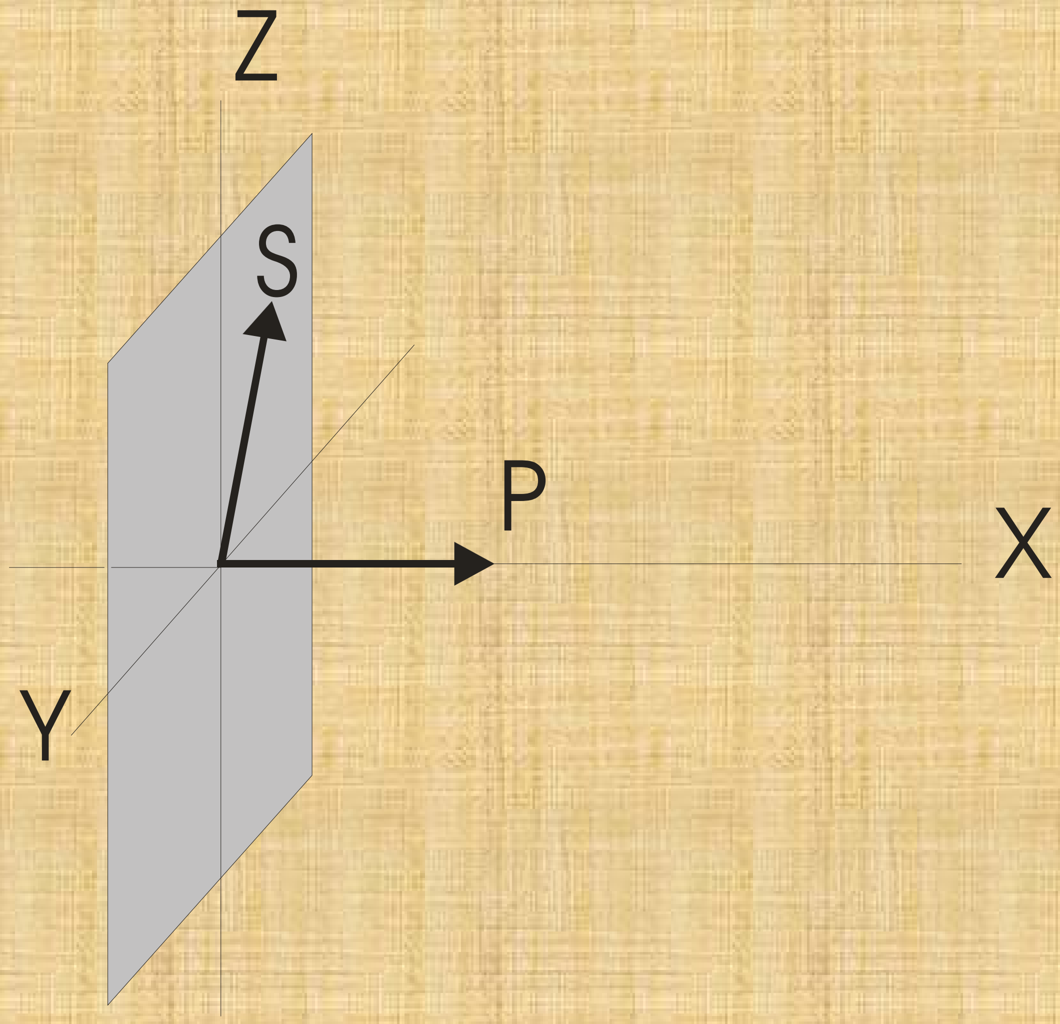
Bu denklem ortam içerisinde x ekseni boyunca θ_x rotasyonunun $(\mu/\rho)^{1/2}$ hızı ile yayıldığını gösterir ki bu **S dalgası** yayılma hızıdır. Tanecik hareketi dalga yayılım yönüne dik bir düzlem içinde sınırlıdır. θ_x deformasyonunu hatırlayınız.

İki farklı dalga türünün yayılması düzlem dalga hali gözönüne alınarak basitçe gösterilebilir. Dalganın *x* yönünde yayıldığını düşünürsek *u*, *v*, ve *w* yerdeğiştirmeleri ;

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \left(\frac{\mu}{\rho}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \left(\frac{\mu}{\rho}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\end{aligned}\right\}$$

Görüldüğü gibi *x* yayılma doğrultusundaki yerdeğiştirme V_P hızı ile, buna dik yöndeki yerdeğiştirmeler ise V_S hızı ile yayılırlar.

Sıvı içinde $\mu = 0$ ve $\lambda = k$ olduğu için sadece dilatasyon dalgası (P dalgası) $V_P = (k/\rho)^{1/2}$ hızı ile yayılır.


Z
S
P
X
Y

Skaler dalga denklemi;

$$\nabla^2 \phi(x,t) = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} \qquad \alpha = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right)^{1/2} = \left(\frac{k + \frac{4}{3}\mu}{\rho}\right)^{1/2}$$

P dalgası

Vektörel dalga denklemi;

$$\nabla^2 \psi(x,t) = \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} \qquad \beta = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2}$$

S dalgası

Üç boyutlu dalga denkleminin çözümü

Üç boyutlu bir ortamda düzlemsel yayılan dalga durumunda denklem çözümü :

$$u(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$$

Üç boyutlu bir ortamda bir O merkezinden küresel yayılan dalga durumunda (küresel koordinatlarda) denklem çözümü :

$$u(r,t) = \frac{1}{r} f_1(r - ct) + \frac{1}{r} f_2(r + ct)$$

<u>Küresel yayılan dalgalarda</u> görüldüğü gibi dalga genliği r^{-1} ile orantılı olarak azalır.

Bir eksene göre simetrik yayılan, yani **silindirik** olarak yayılan dalga durumunda çözüm :

$$u(r,t) = \frac{1}{r^{1/2}} f_1(r - ct) + \frac{1}{r^{1/2}} f_2(r + ct)$$

Silindirik dalga için dalga cephesi r ile orantılı genişlerken dalga genliği **$r^{-1/2}$** ile orantılı olarak azalır.