ELASTİSİTE TEORİSİ (Stress-Strain) Gerilme-Deformasyon İlişkisi

Doç.Dr. Eşref YALÇINKAYA

(3. Ders)

Stress - Gerilme

- Gerilme; birim alana düşen kuvvettir:

Gerilme = kuvvet / alan

$$\sigma = F / A$$

burada

kuvvet = kütle x ivme

Gerilme birimi :

[(kg)(m/s²)](1/m²) = N/m² = Pa (pascal)

1 bar = 10^5 Pa=10^6 dyne/cm^2

Stress - Gerilme

- Gerilmeye bir örnek basınçtır.
- Yerküre içinde hangi derinlikte basınç en büyüktür ?
- 24 km'de 0.6 GPa, 2900 km de ~135 GPa, yer içinin merkezinde ~ 350 GPa
- Derin okyanus araştırma araçları niçin küçüktür ?

E.YALÇINKAYA 3

Stress - Gerilme

- Bir cisim gerilme altında kaldığında, buna farklı şekillerde cevap verir :

  - ☞ *Deforme olur* (şekli veya hacmi değişir) – Bu çoğu kez *elastik* deformasyondur ve gerilme kalktığında cisim ilk haline döner. (*Plastik* deformasyonda, cisim orijinal haline dönemez.
  - ☞ *Akar* – Bu *viskoz* davranış biçimidir. Gerilme kalktığında cisim ilk haline dönemez. Duktil (*ductile*) davranış olarak ta bilinir.
  - ☞ *Kırılır* – Bu *kırılgan* davranış şeklidir ve sadece katı cisimlerde oluşur. Gerilme kalktığında cisim ilk haline dönemez.

E.YALÇINKAYA 4

Strain - Deformasyon

- *Deformasyon* ; uygulanan bir gerilme karşılığında cisim içinde meydana gelen şekil veya hacim değişikliğidir.
- Deformasyon, birimsiz ve boyutsuzdur.

Strain - Deformasyon

- *Örnek* : 5 cm uzunluğundaki bir lastiği çekerek uzunluğunu 6 cm yapabilirsiniz. Bu durumda deformasyon:
- Deformasyon = 1 cm / 5 cm = 0.20 veya 20%
- Deformasyonun birimi yoktur.

Strain - Deformasyon

- Bazı materyaller küçük gerilmelerde çok büyük deformasyonlara uğrarken, bazıları ise büyük gerilmelerde çok küçük deformasyonlar gösterirler
- Bu nedenle gerilme ve deformasyon arasındaki ilişki materyalin özelliğiyle (örneğin yoğunluk) ilgilidir
- Bu stress-strain ilişkisi, materyalin *rheology* olarak tanımlanır.

E.YALÇINKAYA 7

Elastik Enerji

- Elastik bir cisim deforme olduğunda, kendisini deforme eden enerjiyi içinde depolar.
- Bir fırsat verildiğinde depoladığı enerjiyi serbest bırakabilir.
- Depremler, faylar etrafındaki kayalar içinde depolanan büyük deformasyon enerjilerinin açığa çıkması sonucu oluşur.

E.YALÇINKAYA 8

Elastik cisim

Bir kuvvetin etkisi altında deformasyona uğrayan ve kuvvet kaldırıldıktan sonra eski durumuna dönen cisme *elastik cisim*, böyle bir deformasyona da *elastik deformasyon* denir.

Lineer elastisite teorisinde deformasyon gerilmenin devamı süresine bağlı değildir ve gerilme ile deformasyon arasında doğrusal bir bağıntı vardır :

$$\sigma = E\varepsilon$$

Hooke Kanunu

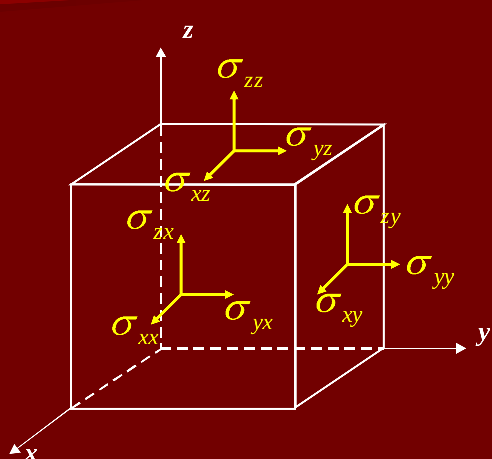
Gerilme

Elastik Parametre (Young modülü)

Deformasyon

Gerilme ve Bileşenleri

Bir hacim elemanı yüzeyleri üzerinde gerilme dokuz bileşeni ile tanımlanır :



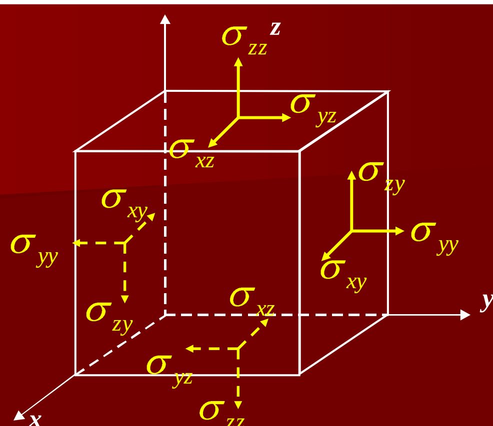
$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}$$

Denge durumunda, net moment sıfırdır ;

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$$
$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$$
$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$$

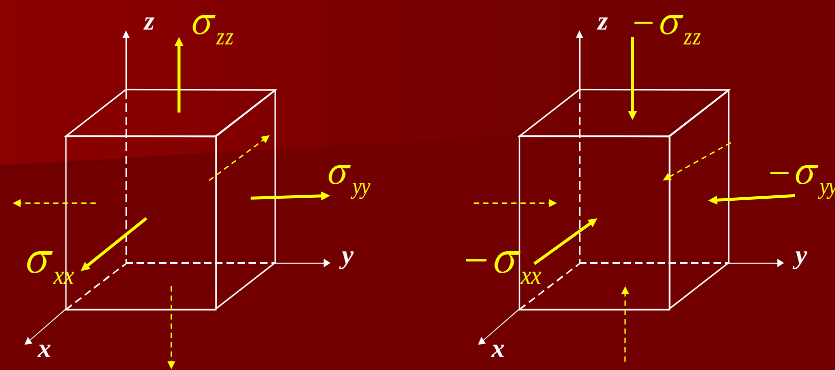
Bu sebeple, daha önce tanımladığımız 9 gerilme bileşeninden sadece altısı birbirinden bağımsızdır.

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}$$



Yüzeye dik olan bileşenler :Normal gerilmeler (σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz})

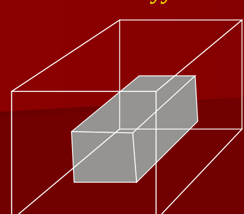
Yüzeye paralel olan bileşenler :Kayma gerilmeleri (σ_{xy}, σ_{xz}, σ_{yx}, σ_{yz}, σ_{zx}, σ_{zy})



Normal gerilmeler pozitif ise;
Çekme (tension) gerilmeleri

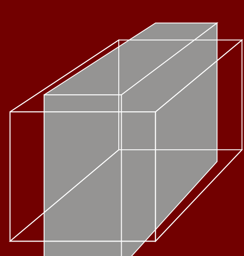
Normal gerilmeler negatif ise;
Basınç (compression) gerilmeleri

$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$ İzotropik gerilme



Gerilmeler negatif ise; hidrostatik basınç
hacimsel daralma
Gerilmeler pozitif ise; hacimsel genleşme

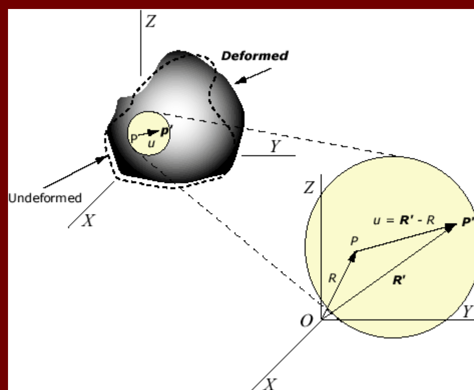
$\sigma_{xx} \neq \sigma_{yy} \neq \sigma_{zz}$ Anizotropik gerilme



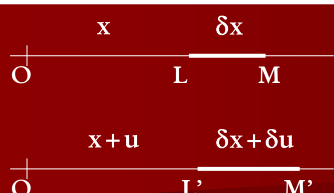
Şekil değişimi

Deformasyon (Strain) ve Bileşenleri

- *Deformasyon* ; uygulanan bir gerilme karşılığında cisim içinde meydana gelen şekil veya hacim değişikliğidir.



15



O noktasında sabitlenmiş bir elastik ip *x* yönünde gerilirse *L* noktası *u* kadar yer değiştirip *L'* noktasına; *M* noktası ise $u+\delta u$ kadar yer değiştirip *M'* noktasına gelir.

x yönündeki deformasyon ε_{xx} ;

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\text{LM uzunluğundaki değişim}}{\text{orijinal LM uzunluğu}}$$

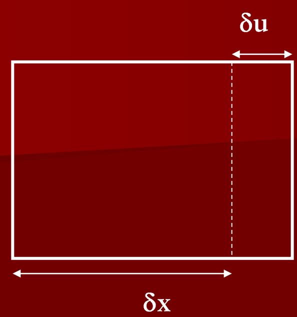
$$\varepsilon_{xx} = \frac{L'M' - LM}{LM} = \frac{\delta x + \delta u - \delta x}{\delta x} = \frac{\delta u}{\delta x}$$

$\delta x \rightarrow 0$ durumunda ;

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

E.YALÇINKAYA

16



$$\varepsilon_{xx} = \frac{\delta u}{\delta x}$$

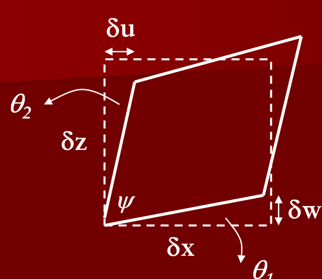
$\delta x \rightarrow 0$ **durumunda ;**

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Kayma (shear) deformasyonu;



$$\gamma_{xz} = \frac{\pi}{2} - \psi = \theta_1 + \theta_2$$

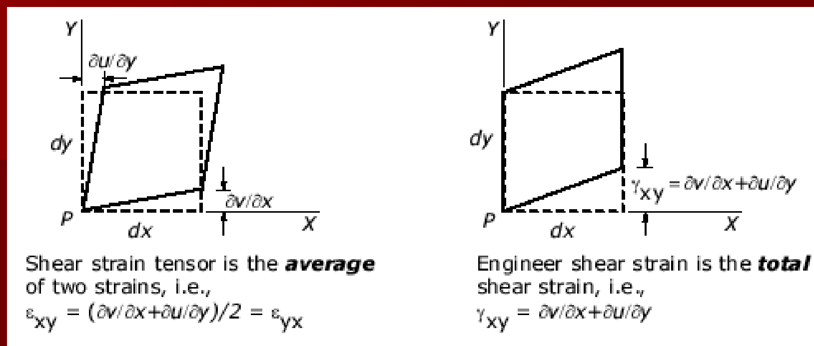
$$\tan\theta_1 = \frac{\delta w}{\delta x} \Rightarrow \theta_1 (\text{çok küçük açıçılar}$$

$$\tan\theta_2 = \frac{\delta u}{\delta z} \Rightarrow \theta_2 (\text{çok küçük açıçılar})$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{xz} = \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$$

boyutlar $\rightarrow 0$ **durumunda ;**

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

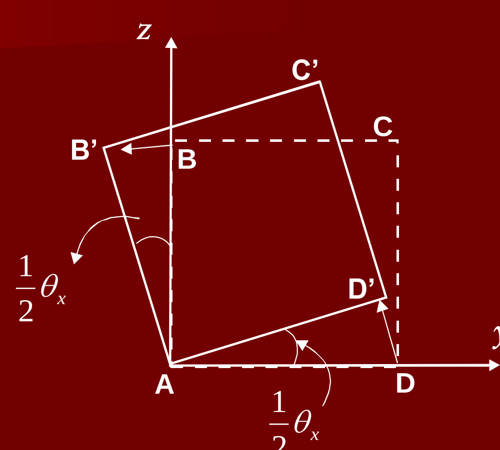


Dönme deformasyonları ;

$$\theta_x \equiv \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\theta_y \equiv \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\theta_z \equiv \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$



Böylece, bir nokta için

$$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial z},\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y},\frac{\partial w}{\partial z}$$

gibi dokuz büyüklük bilinirse komşu noktaların rölatif yerdeğiştirmeleri hesaplanabilir. Strain katsayıları aşağıdaki gibi tanımlayalım :

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\varepsilon_{zy}$$

$$\varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_{zx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\varepsilon_{xz}$$

$$\varepsilon_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z} \qquad \varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\varepsilon_{yx}$$

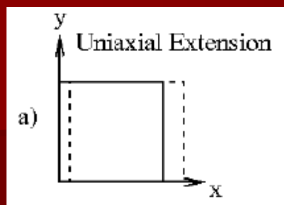
E.YALÇINKAYA 21

$$\varepsilon=\begin{vmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz}\end{vmatrix}$$

$$\varepsilon=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z}\end{vmatrix}$$

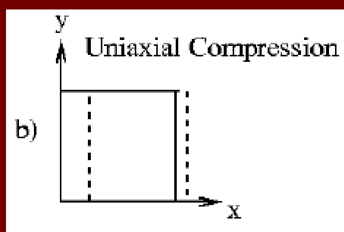
E.YALÇINKAYA 22

Tek eksenli genleşme



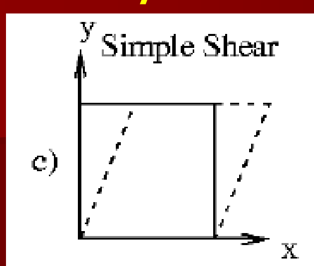
$$\frac{\partial u}{\partial x} > 0 \qquad \varepsilon = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Tek eksenli sıkışma



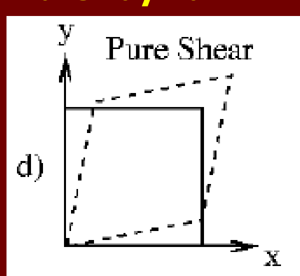
$$\frac{\partial u}{\partial x} < 0 \qquad \varepsilon = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Basit kayma



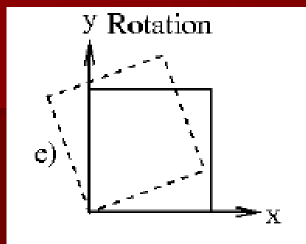
$$\frac{\partial u}{\partial y} > 0$$

Pure kayma



$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \geq 0$$

Dönme



$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \geq 0$$

Bu denklemler üç tür deformasyona işaret ederler ;

1. Hacimsel değişim, genleşme veya daralma (ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{zz})
2. Şekil değişimi (ε_{xy}, ε_{yx}, ε_{xz}, ε_{zx}, ε_{yz}, ε_{zy})
3. Dönme (θ_x, θ_y, θ_z)

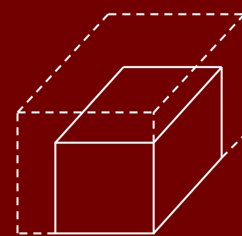
Dilatasyon

Dilatasyon; birim hacime tekabül eden hacim artmasıdır;

$$\Delta = \lim_{V \to 0} \frac{\Delta V}{V}$$

$$\Delta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$



E.YALÇINKAYA 27

STRESS **STRAIN**

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \qquad \varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}$$

$$\sigma = E\varepsilon$$ Hooke Kanunu

Orantı sabiti

E.YALÇINKAYA 28

Gerilme – Deformasyon Bağıntıları

Elastik cisimlerde gerilme ile deformasyon arasındaki ilişki Hook Kanunu ile tanımlanır. Hook kanununa göre deformasyon uygulanan gerilme ile doğru orantılıdır ;

$$\sigma_{ij} = E\varepsilon_{ij}, \qquad i, j = x, y, z$$

Buna göre, elastik cismin içinde herhangi bir noktada gerilmenin bağımsız altı bileşeninden herbiri strain'nin altı bileşeninin bir fonksiyonudur ;

$$\sigma_{xx} = c_{11}\varepsilon_{xx} + c_{12}\varepsilon_{yy} + c_{13}\varepsilon_{zz} + c_{14}\varepsilon_{yz} + c_{15}\varepsilon_{zx} + c_{16}\varepsilon_{xy}$$
$$\sigma_{yy} = c_{21}\varepsilon_{xx} + c_{22}\varepsilon_{yy} + c_{23}\varepsilon_{zz} + c_{24}\varepsilon_{yz} + c_{25}\varepsilon_{zx} + c_{26}\varepsilon_{xy}$$
$$\sigma_{zz} = c_{31}\varepsilon_{xx} + c_{32}\varepsilon_{yy} + c_{33}\varepsilon_{zz} + c_{34}\varepsilon_{yz} + c_{35}\varepsilon_{zx} + c_{36}\varepsilon_{xy}$$
$$\sigma_{yz} = c_{41}\varepsilon_{xx} + c_{42}\varepsilon_{yy} + c_{43}\varepsilon_{zz} + c_{44}\varepsilon_{yz} + c_{45}\varepsilon_{zx} + c_{46}\varepsilon_{xy}$$
$$\sigma_{zx} = c_{51}\varepsilon_{xx} + c_{52}\varepsilon_{yy} + c_{53}\varepsilon_{zz} + c_{54}\varepsilon_{yz} + c_{55}\varepsilon_{zx} + c_{56}\varepsilon_{xy}$$
$$\sigma_{xy} = c_{61}\varepsilon_{xx} + c_{62}\varepsilon_{yy} + c_{63}\varepsilon_{zz} + c_{64}\varepsilon_{yz} + c_{65}\varepsilon_{zx} + c_{66}\varepsilon_{xy}$$

C_{mn} katsayılarına malzemenin elastik sabitleri denir. İzotrop, yani elastik davranışı istikamete bağlı olmayan bir elastik cisim için bağımsız elastik sabitlerin sayısı ikiye iner ; λ, μ . Lame sabitleri olarak adlandırılan bu iki bağımsız elastik sabit kullanılarak gerilme-deformasyon ilişkileri tekrar yazılırsa;

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{yy} + \lambda\varepsilon_{zz} = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{xx}$$

$$\sigma_{yy} = \lambda\varepsilon_{xx} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{yy} + \lambda\varepsilon_{zz} = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{yy}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{yy} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz} = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{zz}$$

$$\sigma_{yz} = \mu\varepsilon_{yz}$$

$$\sigma_{zx} = \mu\varepsilon_{zx}$$

$$\sigma_{xy} = \mu\varepsilon_{xy}$$

Yukarıda verilen ilişkiler ileride sismik dalgaları tanımlarken kullanılacaktır. Aynı zamanda, sismik dalga hızlarının elastik sabitlere bağlı olduğunu göreceğiz. İzotrop bir ortam içinde sismik dalga hızları yayıldıkları yöne bağımlı değildir.

μ ; "*rijidite (katılık)*" veya "*kayma modülü*"; elastik izotrop bir cismin kayma gerilmesine (ör. σ_{xy}) karşı direnci olarak tanımlanabilir.

$$\mu = \frac{\sigma_{xy}}{\varepsilon_{xy}}$$

Yüksek μ değerine sahip bir cisim uygulanan kayma gerilmesine çok küçük bir kayma deformasyonu ile karşılık verir. Sıfır rijidite değeri kayma gerilmelerinin oluşmadığı sıvı ortamlara karşılık gelir.

Yerkabuğu için rijidite değeri yaklaşık ; 3 x 10^{11} dyne/cm^2 dir. Çelik için ise ; 8 x 10^{11} dyne/cm^2 dir.

Diğer bir elastik sabit "sıkışmazlık" veya "bulk modülü - k" dür.

$$k = -\frac{P}{\Delta} = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

Bir cismin hacim değişikliğine karşı direnci olarak tanımlanabilir. Uygulanan bir basınç altında büyük k değeri daha küçük bir hacim değişikliğine işaret eder. Sıvı içinde $k=\lambda$ dir.

	K	G
Demir	1.7 x 10^{11}Pa	0.8
Bakır	1.33	0.5
Silikon	0.98	0.7
Kuvars	0.3	0.47
Buz	0.073	0.025

"Poisson oranı – v " bir cisim üzerinde enine daralmanın boyuna uzamaya oranı olarak tanımlanır.

$$v = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

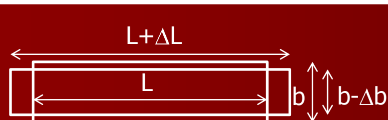
0 ile 0.5 arasında değişir. Hiç sıkışmayan ve tam sıkışan sırasıyla. Sünger çok küçük bir poisson oranına sahip iken metal bir silindir yüksek poisson oranına sahiptir. Düşük poisson oranı aynı zamanda malzemenin yüksek oranda potansiyel enerji depolayabildiğinin göstergesidir. Bazalt=0.25, Kireçtaşı=0.32 Cam=0.24, Sünger=0.10 ..

"**Young modülü – E** " bir cisim üzerinde boyuna gerilmenin boyuna deformasyona oranı olarak tanımlanır. Kabuk kayaları için E ≈ 10^{11} pascal.

$$E = -\frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

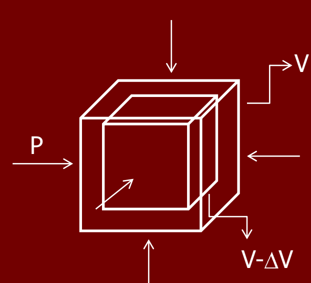
Elastik sabitler E, v ve k basit deneylerle kolayca ölçülebilmeleri nedeniyle mühendislikte sık kullanılan sabitlerdir. Sismik dalga yayılımı için ise λ ve μ, bazen de k daha yaygındır.

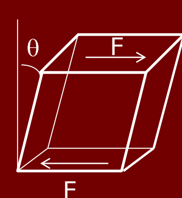
Çoğu sismolojik problem $\lambda = \mu$ kabul edilerek basitleştirilir. Böyle bir cisim *Poisson katısı* olarak bilinir ve yerküre için uygun bir yaklaşımdır. Bu durumda Poisson oranı *0.25* değerine, Young modülü $E = (5/2)\,\mu$, bulk modülü $k = (5/3)\,\mu$ 'e eşit olur.



$$v = \frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} = \frac{\Delta b / b}{\Delta L / L}$$

$$E = \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}} = \frac{F / A}{\Delta L / L}$$





$$k = \frac{P}{\Delta V / V}$$

$$\mu = \frac{\sigma_{xy}}{\varepsilon_{xy}} = \frac{F / A}{\theta}$$

Stress ve strain'e göre elastik davranış;

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \longrightarrow \text{Uzama deformasyonu}$$

Shear Stress'e göre elastik davranış;

$$\sigma_S = G \cdot \gamma$$

Kayma deformasyonu

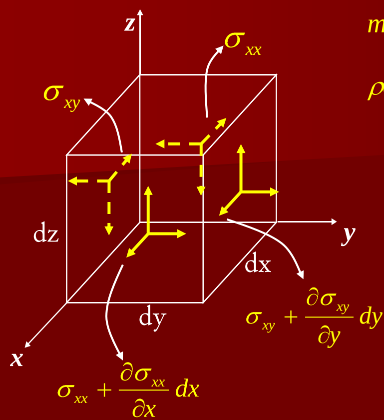
Hacim değişimindeki orantı sabiti ise;

$$\sigma = K \cdot [(V - V_0)/V_0]$$

Hacimsel deformasyonu

3 Boyutlu Dalga Denklemleri

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \\ v &= (\tau / \rho)^{1/2} \\ u(x,t) &= f(x \pm vt) \end{aligned}\right\} \text{Bir Boyutlu Dalga denklemi ve çözümü}$$



$$ma = F$$

$$\rho dxdydz \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx)dydz - \sigma_{xx} dydz$$
$$+ (\sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dy)dxdz - \sigma_{xy} dxdz$$
$$+ (\sigma_{xz} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz)dxdy - \sigma_{xz} dxdy$$

Üç Boyutlu Dalga denklemleri

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{cases}$$

Bu denklemeler gerilme-deformasyon ve deformasyon-yerdeğiştirme ilişkileri kullanılarak yerdeğiştirmelere göre yazılabilir :

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w \end{aligned} \right\}$$

Üç Boyutlu Dalga denklemleri (yerdeğiştirmelere göre)

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Laplace operatörü

$$\Delta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Dilatasyon

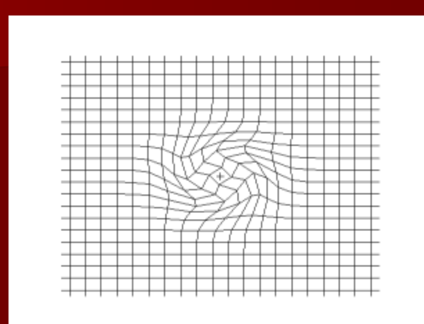
Bu denklemeler, izotrop, tam elastik bir katı içinde üç boyutlu hareket denklemlerini temsil ederler. Bu denklemeler ortam içerisinde iki tür dalga yayılımını belirlerler. Bunlar gerekli işlemlerden sonra ;

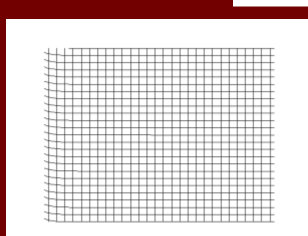
$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \nabla^2 \Delta$$

Bu denklem Δ dilatasyonunun $(\lambda+2\mu/\rho)^{1/2}$ hızı ile ortam içerisinde yayıldığını gösterir ki bu **P dalgası** yayılma hızıdır. Δ; kayma ve rotasyonun (dönme) olmadığı hacimsel bir deformasyonu tanımlar.

$$\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \theta_x$$

Bu denklem ortam içerisinde x ekseni boyunca θ_x rotasyonunun $(\mu/\rho)^{1/2}$ hızı ile yayıldığını gösterir ki bu **S dalgası** yayılma hızıdır. Tanecik hareketi dalga yayılım yönüne dik bir düzlem içinde sınırlıdır. θ_x deformasyonunu hatırlayınız.

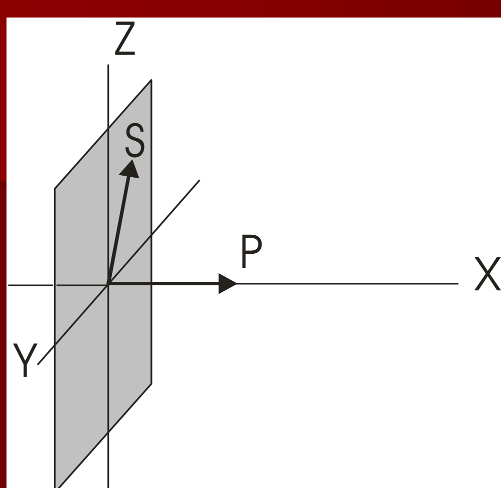




İki farklı dalga türünün yayılması düzlem dalga hali gözönüne alınarak basitçe gösterilebilir. Dalganın *x* yönünde yayıldığını düşünürsek *u*, *v*, ve *w* yerdeğiştirmeleri ;

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \left(\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \left(\frac{\mu}{\rho}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \left(\frac{\mu}{\rho}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\end{aligned}\right\}$$

Görüldüğü gibi *x* yayılma doğrultusundaki yerdeğiştirme V_P hızı ile, buna dik yöndeki yerdeğiştirmeler ise V_S hızı ile yayılırlar.



$$\alpha = \left(\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\right)^{1/2}$$ **P dalgası**

$$\beta = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2}$$ **S dalgası**

Sıvı içinde $\mu = 0$ ve $k = \lambda$ olduğu için sadece dilatasyon dalgası (P dalgası) $V_P = (k/\rho)^{1/2}$ hızı ile yayılır.

Üç boyutlu dalga denkleminin çözümü

Üç boyutlu bir ortamda düzlemsel yayılan dalga durumunda denklem çözümü :

$$u(x,t) = f_1(x-ct) + f_2(x+ct)$$

Üç boyutlu bir ortamda bir O merkezinden küresel yayılan dalga durumunda (küresel koordinatlarda) denklem çözümü :

$$u(r,t) = \frac{1}{r} f_1(r-ct) + \frac{1}{r} f_2(r+ct)$$

Küresel yayılan dalgalarda görüldüğü gibi dalga genliği r^{-1} ile orantılı olarak azalır.

Bir eksene göre simetrik yayılan, yani silindirik olarak yayılan dalga durumunda çözüm :

$$u(r,t) = \frac{1}{r^{1/2}} f_1(r-ct) + \frac{1}{r^{1/2}} f_2(r+ct)$$

Silindirik dalga için dalga cephesi r ile orantılı genişlerken dalga genliği $r^{-1/2}$ ile orantılı olarak azalır.